Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XII-a M_1

Problema 1

Să se determine primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Problema 2

a) Să se arate că $\int \cos\left(x^3+1\right)dx = x\cos\left(x^3+1\right)+3\int x^3\sin\left(x^3+1\right)dx,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int\left(4+9x^6\right)\cos\left(x^3+1\right)dx$, unde $x\in\mathbb{R}$.

Problema 3

Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziție asociativă $x*y=xy-2x-2y+6$, $(\forall)x,y\in\mathbb{Z}$. Să se determine restul împărțirii lui $\underbrace{5*5*\ldots*5}_{\text{de 2014 ori}}$ la 3^{2014}.

Problema 4

Se consideră mulțimea $G=\left\{A_x=\begin{pmatrix}1 & 2x & 5x^2-2x\\ 0 & 1 & 5x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \middle| x\in\mathbb{R}\right\}\subset M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $A_x\cdot A_y=A_{x+y}$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se arate că $(G,\cdot)$ formează o structură de grup.

c) Să se arate că $f:G\to\mathbb{R},\ f(A_x)=x$ este un izomorfism de la $(G,\cdot)$ la $(\mathbb{R},+)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XII-a M_2

Problema 1

Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie asociativă, $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

- **a)** Arătaţi că $x * y = 2(x-3)(y-3)+3, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- **b)** Calculaţi $1 * 2 * \ldots * 2014$.
- **c)** Există $a, b \in \mathbb{R} / \mathbb{Q}$ astfel încât $a * b \in \mathbb{N}$? *Justificaţi răspunsul*.

Problema 2

Să se calculeze integralele $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ şi $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Problema 3

Fie $f, F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $F(x) = (ax+b)\sqrt{x-1}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât F este o primitivă pentru f.

Problema 4

Se consideră mulţimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Z} \right\}$.

- **a)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup.
- **b)** Arătaţi că $f : \mathbb{Z} \to G, f(x) = A(x)$ este un izomorfism de la $(\mathbb{Z}, +)$ la $(G, \cdot)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.