Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M_1

Problema 1

Rezolvați în R ecuația $\left[\frac{4x+4}{4x-5}\right]=\frac{2x-1}{3}$.

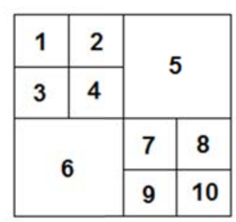
Problema 2

a) Arătați că $4x^3+4x^2+2\geq 7x$, $\forall x\in[-2,\infty)$

b) Determinați valorile reale ale lui k, pentru care: $a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2+\frac{3}{2}\geq k(a+b+c)$, $\forall a,b,c\in[-2,\infty)$.

Problema 3

Să se arate că pentru orice număr natural $n\geq 6$, un pătrat se poate împărți în exact n pătrate (*nu neapărat de aceeaşi dimensiune – în figura alăturată aveți un exemplu pentru* $n=10$).



Problema 4

a) Arătați că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci, pentru orice punct O din planul triunghiului avem $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

b) Determinați o relație între numerele reale a,b astfel încât punctele $A(1,1)$, $B(a,b)$ şi $C(a+1,b+1)$ să fie vârfurile unui triunghi.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M$_2$

Problema 1

Arătaţi că: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y},(\forall)a,b\in\mathbb{R}$ şi $(\forall)x,y\in\mathbb{R}_+^*$.

Problema 2

La o fabrică de încălţăminte s-au fabricat în luna martie 2013, 540 perechi de pantofi, la fel şi în aprilie, iar la fiecare două luni producţia se dublează.

a) Câte perechi de pantofi se fabrică până la sfârşitul anului (*începând cu luna martie*)?
b) În ce lună/an producţia va fi de 276480 de pantofi?

Problema 3

Fie $ABCD$ un paralelogram. Să se arate că pentru orice punct M din planul paralelogramului avem relaţia $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Problema 4

Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

a). Să se verifice că $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

b). Să se calculeze S_5.

c). Utilizând eventual metoda inducţiei matematice, să se arate că $S_n=\frac{n}{n+1}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

d). Să se găsească cel mai mare număr natural nenul n, cu proprietatea că $S_n<\frac{11}{12}$.

e). Să se găsească cel mai mic număr natural nenul n, cu proprietatea că $S_n>\frac{111}{112}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.