

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

## CLASA A IX-A

1. Două autovehicule A și B pornesc simultan din același punct M și se deplasează pe aceeași direcție și în același sens cu vitezele constante  $v_1$  și  $v_2$  ( $v_1 < v_2$ ), descriind un drum rectiliniu d. Fie P un punct care nu aparține dreptei d, astfel încât  $PM = a$  și  $m(\sphericalangle PMA) > 90^\circ$ . După cât timp de la pornire unghiul  $\sphericalangle APB$ , sub care se văd autovehiculele din punctul P, este maxim?

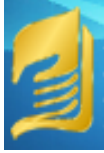
2. Calculați suma  $S = \left[ \frac{1^2}{2} \right] + 2^1 \cdot \left[ \frac{2^2}{3} \right] + 2^2 \cdot \left[ \frac{3^2}{4} \right] + \dots + 2^{2013} \cdot \left[ \frac{2014^2}{2015} \right]$ , unde  $[x]$  este partea întreagă a numărului real x.

3. Determinați funcția  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ , știind că  $1^2 f(1) + 2^2 f(2) + \dots + n^2 f(n) = \frac{n^2 (f(n) + 1)^2}{4}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

*Gazeta Matematică 11/2013*

4. Fie  $\Delta ABC$  și  $A_1 \in (BC)$ ,  $B_1 \in (CA)$ ,  $C_1 \in (AB)$ , astfel încât  $\frac{BA_1}{BC} = \frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{1}{n}$ ,  $n > 2$ ,  
 $AA_1 \cap BB_1 = \{B'\}$ ,  $BB_1 \cap CC_1 = \{C'\}$ ,  $CC_1 \cap AA_1 = \{A'\}$ . Aflați raportul  $\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}$ .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



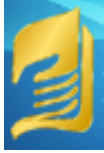
FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A X-A

1. Se consideră numerele complexe  $a, b, c$  și  $d$ , astfel încât  $a + b = c + d$  și  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ .  
Arătați că  $a^n + b^n = c^n + d^n$ , oricare ar fi numărul natural  $n$ .
2. Determinați numerele reale  $x$  cu proprietatea că  $[\log_2 x] + [\log_4 x] = 3$  (unde  $[a]$  este partea întreagă a numărului real  $a$ ).  
*Gazeta Matematică 1/2014*
3. Se consideră numerele pozitive  $a, b, c$  și funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ . Fie  $u, v, w$  numere reale astfel încât  $0 \leq u < v < w$  și punctele  $U(u, f(u)), V(v, f(v))$  și  $W(w, f(w))$ .  
Demonstrați că  $UW^2 > UV^2 + VW^2$ .
4. Prin înfășurarea unui dreptunghi de perimetru 1 se obține suprafața laterală a unui cilindru. Determinați volumul maxim posibil al acestui cilindru și precizați dimensiunile dreptunghiului pentru care se atinge acest maxim.  
*Notă:* Volumul unui cilindru circular drept având raza  $R$  și înălțimea  $H$  se calculează folosind formula  $V = \pi R^2 H$ .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

## CLASA A XI-A

1. Determinați asimptotele graficului funcției  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ .
2. Fie  $A$  o matrice pătratică de ordin 3 cu elemente numere întregi. Demonstrați că matricea  $3A + 5I_3$  este inversabilă.

*Supliment Gazeta Matematică 9/2013*

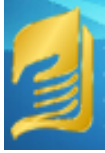
3. Folosind noțiunea de limită a unei funcții într-un punct, demonstrați că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  nu este funcție rațională.

*Notă:* O funcție se numește *rațională* dacă se poate scrie ca raport a două funcții polinomiale.

*Supliment Gazeta Matematică 1/2014*

4. O echipă de hochei este formată din 6 titulari și 9 rezerve. Antrenorul poate face schimbări oricând, oricâte și poate schimba oricare jucător; un jucător schimbat poate reveni în joc după un timp. Timpul efectiv de joc este de 60 minute. Într-o anumită partidă, se constată la final că fiecare dintre cei 15 componenți ai echipei a jucat un același număr  $n$  de minute.
  - a) Determinați valoarea lui  $n$ .
  - b) Descrieți, folosind o matrice pătratică ce are ca elemente doar numerele 0 și 1, o modalitate în care antrenorul poate trimite în teren jucătorii astfel încât să fie respectate condițiile problemei.

**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
8 martie 2014



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

## CLASA A XII-A

1. Fie  $a > 0$  și funcțiile  $f, g, G : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(3 + \ln x)(5 + \ln x)}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x(a + \ln x)}$ ,  
 $G(x) = \ln(a + \ln x)$ .

a) Arătați că  $G$  este o primitivă a lui  $g$  pe intervalul  $[1, +\infty)$ .

b) Determinați o primitivă  $F$  a funcției  $f$  pe intervalul  $[1, \infty)$  cu proprietatea  $F(e^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{7}$ .

*Supliment Gazeta Matematică 12/2013*

2. Pe  $\mathbb{Z}$  definim legea de compoziție " $\circ$ " dată prin  $x \circ y = 5xy + 5(x + y) + 4$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ .

a) Cercetați dacă legea " $\circ$ " este asociativă.

b) Aflați ultimele 100 cifre din scrierea zecimală a numărului întreg  $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 \circ \dots \circ 2013 \circ 2014$ .

3. Fie grupul  $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$ . Pentru un element  $\hat{a} \in \mathbb{Z}_p^*$ , definim funcția :

$\psi : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ ,  $\Psi(\hat{x}) = \hat{a} \cdot \hat{x}$ ,  $\forall \hat{x} \in \mathbb{Z}_p^*$ ; ( $p$  număr prim).

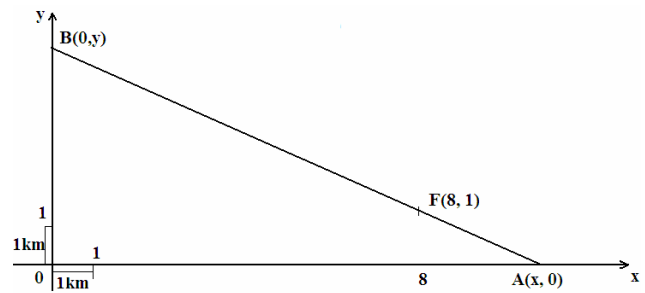
a) Arătați că  $\psi$  este bijecție.

b) Demonstrați egalitatea  $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \dots \cdot \widehat{p-1} = \Psi(\hat{1}) \cdot \Psi(\hat{2}) \cdot \dots \cdot \Psi(\widehat{p-1})$ .

c) Justificați că  $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}$ .

d) Argumentați că  $2017 \mid \left( \sum_{i=1}^{2016} C_{2017}^i \right)$ .

4. O fabrică  $F(8, 1)$  se află poziționată între două șosele perpendiculare  $Ox$  și  $Oy$ , ca în desenul alăturat. Se construiește o șosea rectilinie care să unească fabrica cu cele două șosele, astfel încât aceasta să fie de cost minim, adică lungimea  $FA + FB = AB$  să fie minimă. Aflați lungimea șoselei  $AB$  de cost minim.



**Notă:** Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.