



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLAE PAUN"

EDIȚIA A XX-A 21 MARTIE 2014

SUBIECTE CLASA A IX-A

Problema 1. Fie $a, b, c \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ și $k > 0$. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{a^2}{1+kbc} + \frac{b^2}{1+kca} + \frac{c^2}{1+kab} \geq \frac{3}{3+k}.$$

Vasile Gorgota și Sorin Ulmeanu

Problema 2. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Notăm cu $f(n)$ cel mai mic număr natural m cu proprietatea că oricare ar fi m numere întregi există printre ele două distincte a căror sumă sau diferență este divizibilă cu n . Să se determine $f(n)$.

Ioan Rasa

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$(2n-1)\frac{a}{6} + \frac{b}{2} + \frac{c}{n} = 0.$$

Demonstrați că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are cel puțin o rădăcină reală pozitivă, mai mică decât n .

Cristinel Mortici

Problema 4. Prin varfurile A, B și C ale triunghiului ABC construim trei drepte paralele AD, BE , respectiv CF unde punctele D, E, F sunt punctele de intersecție ale dreptelor cu cercul circumscris triunghiului ABC . Demonstrați că ortocentrele triunghiurilor ABF , AEC și DBC sunt pe o dreaptă paralelă cu dreptele construite.

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotate cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.