CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "NICOLAE PAUN"

EDIȚIA A XX-A 21 MARTIE 2014

SUBIECTE CLASA A XI-A

Problema 1. **Fie** $A \in M_n(\mathbb{R})$ **o matrice cu proprietatea** $A^3 - A^2 - A = 2I_n$.

(i) Demonstrati ca exista k natural astfel incat $|\det(A)| = 2^k$.

(ii) Pentru n=2 sa se arate ca $A^3 \in \{I_2, 8I_2\}$.

Vasile Pop

Problema 2. Notăm cu $W(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

a) Să se calculeze $W(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

b) Dacă a_1, a_2, $\dots$, a_n, a_{n+1} sunt numere complexe distincte două câte două, atunci $W(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}) + W(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n+1}, a_n) + W(a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, a_{n+1}, a_{n-1}, a_n) + \dots + W(a_{n+1}, a_2, \dots, a_n) = W(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Mihai Piticari și Vladimir Cerbu

Problema 3. Se dă un şir $(x_n)_{n\ge1}$ de numere reale nenule, astfel încât $x_1 = 1$ şi $n^2x_n^2 - (2n^2 - 1)x_nx_{n-1} + (n^2 - 1)x_{n-1}^2 \le 0$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \ge 2$. Să se arate că $(x_n)_{n\ge2}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge \frac{1}{2}$.

Mihai Piticari și Vladimir Cerbu

Problema 4. a) Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții. Să se arate că, dacă g este funcție continuă, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(g(x)) = l$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$.

b) Dați exemple de funcții $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(g(x)) = 0$ şi nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Dorin Andrica și Mihai Piticari

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.