S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a V-a

Subiectul I.

Pentru orice n număr natural, aflaţi restul împărţirii numărului $A=5^{n+4}\cdot 3^{n+1}+5^{n+1}\cdot 3^{n+3}+3\cdot 15^{n}$ la 2013.

Subiectul II.

Stabiliţi dacă următoarele numere sunt pătrate perfecte:

$a=2001^2-2001-2000$;
$b=(1+2+3+...+2002)\ 3003^{2005}$;

$c=2^{2n+1}\ 5^{2n+3}-3$; $n\in \mathbf{N}$.

Subiectul III.

Ana şi Barbu desenează pe câte o foaie de hârtie grupuri de steluțe . Ana desenează o steluță, apoi 3 steluțe apoi 5 şi așa mai departe, de fiecare dată un număr impar. Barbu desenează 2 steluțe, apoi 4 steluțe, apoi 6 şi așa mai departe, de fiecare dată un număr par. Arătați că, indiferent de momentul la care se vor opri din desenat cei doi copii, numărul total de steluțe desenate de Ana nu poate fi egal cu numărul total de steluțe desenate de Barbu.

Gazeta Matematică

Subiectul IV.

Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care verifica relaţia $\overline{ab}\cdot(b^2+c^2)=2014$

Gazeta Matematică

Notă.
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

Propunători: Todoran Nicoleta, Seceleanu Daniela, Ginta Florica.

S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a VI-a

Subiectul I.

Arătați că numarul a = $n^{65} - n^{13}$ se divide cu 10, oricare ar fi n numarul natural.

***

Subiectul II.

Se consideră numerele raționale pozitive x= $1\frac{1}{99}+2\frac{2}{99}+3\frac{3}{99}+\cdots+98\frac{98}{99}$ și y= $\frac{21}{97}+\frac{2121}{9797}+\frac{212121}{979797}$.

a) Arătați că x este pătrat perfect.
b) Comparați numerele x și y.

***

Subiectul III.

Dreptele AB si CD sunt concurente in O. Stiind ca semidreptele [OM, [OT, [OR, sunt bisectoarele unghiurilor <BOD, <DOM si respectiv, <COB, iar m(<AOM)=130^0, calculati:

a) m(<ROM);

b) m(<AOD);

c) masura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor <AOC si <BOR.

***

Subiectul IV.

Demonstraţi că, oricare ar fi *n* număr natural, numărul $A=3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1}$ este divizibil cu 17.

Gazeta matematică

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

Propunători: Bozdog Constantin, Suciu Sorin, Botez Radu.

S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a VII-a

Subiectul I

Fie expresia $A = 53 \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2013\cdot 2014}\right)$.

a) Să se calculeze valoarea expresiei *A*.

b) Să se demonstreze că A poate fi scris in forma $\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e}$, unde suma cifrelor din numerele a, b și c este egal cu suma cifrelor din numerele d și e .

Subiectul II

Fie dreptunghiul ABCD.Perpendiculara AM pe BD (M$\in$ BD), intersectează BC și DC, respectiv în E și F. Să se arate că $\frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE}$.

Subiectul III

In triunghiul ascutitunghic ABC, inaltimea AD este egala cu latura BC. Bisectoarele unghiurilor ADB si ADC intersecteaza pe AB respectiv AC in M si N. Sa se arate ca: $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$.

Subiectul IV

Dacă a, b, c sunt numere naturale impare, iar q este un număr raţional oarecare, arătaţi că

$$aq^2 + bq + c \neq 0$$

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof.Bonta Patricea, Capusan Cornelia, Portik Antal, Andreica Gheorghe

S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Aduceți la o formă mai simplă expresia $(5+4)(5^2+4^2)(5^4+4^4)(5^8+4^8)...(5^{512}+4^{512})$.

b) Arătaţi că:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{12}}+...+\frac{29}{\sqrt{210}}\geq 28$$

SUBIECTUL II

Demonstrați ca oricare ar fi numerele reale pozitive x, y, z are loc inegalitatea:

$$2xy(2x+y)+6xz(2x+3z)+3yz(y+3z)\geq 36xyz$$

SUBIECTUL III

Fie cubul ABCDA'B'C'D', Q centrul feței BCC'B' și P mijlocul muchiei (AB). Fie $DM\perp PC$, $M\in PC$. Arătați că:

a) dreapta DM conține mijlocul segmentului (BC);

b) $QM\perp PC$.

SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul ABC în care D este mijlocul segmentului BC. Dacă E este mijlocul segmentului AD, F este mijlocul segmentului BE, iar G este punctul de intersecţie a dreptelor AB şi CF, calculaţi $\frac{AG}{AB}$.

Gazeta matematică

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof.Stoica Angela, Curta Doina, Danciu Alin, Gînța Vasile

S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a IX-a

Problema 1:

Calculaţi: $\left[\frac{1^2}{2}\right] + 2^1 \cdot \left[\frac{2^2}{3}\right] + 2^2 \cdot \left[\frac{3^2}{4}\right] + \ ... + 2^{n-1} \cdot \left[\frac{n^2}{n+1}\right]$.

Problema 2:

Se consideră triunghiul *ABC* oarecare. Se duc : mediana *AL* corespunzătoare laturii *[BC]*, bisectoarea *LE* a unghiului $\widehat{ALC}$, bisectoarea *LF* a unghiului $\widehat{ALB}$. ($E \in AC, F \in AB$) Notăm $EF \cap AL = \{M\}$. Demonstraţi că oricare ar fi punctul *O* din plan avem : $2 \cdot \overline{OM} = \overline{OE} + \overline{OF}$.

Problema 3:

Se consideră numerele reale a,b,c diferite de -1 cu abc=1. Arătaţi că dacă

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{3}{2},$$

atunci unul din numerele a,b,c este egal cu 1.

Problema 4

Aflaţi $x > 1$pentru care $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=2014x$, unde $[x]$înseamnă partea întreagă a lui *x*, iar $\{x\}$reprezintă partea fractionară a lui *x*.

Gazeta Matematică

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof.Hecser Enikő, Pescărus Teodor

S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a X-a

Problema 1:

Calculați suma

$$S = [\lg 1] + [\lg 2] + [\lg 3] + \cdots + [\lg 10^{2014}].$$

Problema 2:

Determinați funcțiile strict crescătoare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$f(xf(y)) = f(x)y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Problema 3:

Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \cos A + \cos B + \cos C = 3.$$

Gazeta matematică

Problema 4:

Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ cu $\operatorname{Re} z_1 \geq 0$ și $\operatorname{Re} z_2 \geq 0$. Să se arate că $|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \geq 0$.

Gazeta matematică

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof.Oprica Natalia,prof. Blaga Cristinel

S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a XI-a

Problema 1

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ astfel încât $x_2 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{n^2}{n-1}\cdot x_n$, $n \geq 2$.
Dacă $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\cdot\dfrac{1}{x_k}$, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Problema 2

Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ 13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}},\ \forall n \geq 2.$$

Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Problema 3

Fie $A \in M_n(\mathbf{R})$, unde n este impar. Să se arate că dacă $A^2 = O_n$, atunci oricare ar fi matricea $X \in M_n(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $AX = XA$, au loc inegalităţile:

$$\det\left(XA + X^2\right) \geq 0 \leq \det\left(XA - X^2\right).$$

Problema 4

Notă:

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Propunători: prof.Pop Carmen, György Gabriella

S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală
14.02.2014
Clasa a XII-a

Problema 1

Fie mulțimea $G = (k, \infty) \setminus \{k+1\}, k > 0$, pe care se definește legea $*$ astfel încât:
$log_a[(x * y) - k] = log_a(x-k) \cdot log_a(y-k), \forall x, y \in G, a > 0, a \neq 1$.

a) Să se determine numărul perechilor de numere întregi (k, a) pentru care elementul neutru al legii $*$ este e = 2014.
b) Să se verifice dacă legea $*$ este asociativă și să se determine elementul $x \in G$ care verifică relația $x = x'$, în cazul k=a+1=1005.(s-a notat cu a' simetricul lui a în raport cu legea $*$).

Problema 2

Fie $f:(0,\pi)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\cdot e^{-x}$. Să se determine primitiva F a lui f pentru care $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

Matlap

Problema 3

Pentru $a\in\mathbf{R}$ și $b\in\mathbf{R}^*$ considerăm funcția $f_{a+bi}:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$. $f_{a+bi}(x+iy)=x+(a+ib)y$ și notăm

$G=\left\{f_{a+bi} \middle| a\in\mathbf{R}, b\in\mathbf{R}^*\right\}$.

a) Să se demonstreze că G este un grup necomutativ în raport cu compunerea funcțiilor.
b) Considerăm și grupul $H=\left\{f_{a,b} \middle| a\in\mathbf{R}^*, b\in\mathbf{R}\right\}$, unde $f_{a,b}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f_{a,b}(x)=ax+b$ și unde operația este de asemenea compunerea funcțiilor.

Să se demonstreze că aplicația $h:H\to G$, $h(f_{a,b})=f_{-\frac{b}{a}+\frac{1}{a}i}$ este un izomorfism de grupuri.

Problema 4

Să se determine funcția derivabilă $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ știind că $f'(x)=f(x)+\dfrac{f(x)}{x}+e^x$, pentru orice $x>0$ și $f(1)=e$.

Gazeta Matematica

Subiectele au fost selectate de: Astalus Niculina, Ilie Stefan, Matefi Istvan