



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

BAREM CORECTARE
CLASA A IX-A

1.

- a) 1 verifică ecuația $x^2 - x = 0$, deci $1 \in A$ 1p
- b) $1 + \sqrt{2}$ verifică ecuația $x^2 - 2x - 1 = 0$, deci $1 + \sqrt{2} \in A$ 2p
- c) Dacă, prin reducere la absurd, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in A$, atunci $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + a(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + b = 0$... 1p
Găsim $\sqrt{6} (2a^2 - 4b - 20) = (b + 5)^2 + 24 - 5a^2$ 1p
- Dacă $2a^2 - 4b - 20 \neq 0$, atunci $\sqrt{6} = \frac{(b + 5)^2 + 24 - 5a^2}{2a^2 - 4b - 20}$, fals..... 1p
- Urmează că $2a^2 - 4b - 20 = 0$ și $(b + 5)^2 + 24 - 5a^2 = 0$, de unde găsim $b = 1$ și $a^2 = 12$ sau $b = -1$ și $a^2 = 8$, ceea ce nu convine..... 1p

2.

- a) Dacă $x = 1$ obținem $f(0) = 1$ 2p
- b) Notăm $x - 1 = t$ și găsim $f(t) = 2t + 1$ 2p
- c) Avem: $S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{201} - \frac{1}{203} \right)$ 2p
- Obținem $S = \frac{101}{203}$ 1p

3.

- a) Calcul..... 1p
- b) Folosind relația de la a) avem $S = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \dots + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right)$ 2p
- Deducem că $S = \frac{n-1}{a_1 a_n}$ 1p
- c) Deoarece $1 - \frac{r^2}{a_k^2} = \frac{a_{k-1} a_{k+1}}{a_k^2}$ 1p
- Obținem $P = \frac{a_1 a_3}{a_2^2} \cdot \frac{a_2 a_4}{a_3^2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n-1} a_{n+1}}{a_n^2}$ 1p
- sau $P = \frac{a_1 a_{n+1}}{a_2 a_n}$ 1p

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

4. a) Avem $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ și prin adunare obținem relația respectivă..1p

b) Analog, $2 \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ 1p

Din asemănarea triunghiurilor COD și AOB avem $OC = kOA$ și $OD = kOB$, unde

$$k = \frac{CD}{AB} \dots\dots\dots 1p$$

Obținem $\overrightarrow{OM} = -k \cdot \overrightarrow{ON}$, deci punctele M, N și O sunt coliniare.....1p

c) Fie E punctul de intersecție al dreptelor MN și AD.

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ABD și transversala M-O-E, avem

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{OB}{OD} \cdot \frac{ED}{EA} = 1, \text{ sau } \frac{OB}{OD} = \frac{EA}{ED} \text{ (1)} \dots\dots\dots 1p$$

Analog pentru triunghiul ACD și transversala O-N-E obținem $\frac{OA}{OC} = \frac{EA}{ED}$ (2).....1p

Din (1) și (2) avem $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$, deci $CD \parallel AB$1p

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

BAREM DE CORECTARE - CLASA A X-A

1. a) Obține $x > y \Leftrightarrow \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ 2p

Finalizare $A > B$ 1p

b) Observă $A + B = 2AB \Leftrightarrow \frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 2$ 2p

Finalizare $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 2 \Leftrightarrow \log_{x-y}(xy) = 2 \Leftrightarrow \log_{x-y}(x-y)^2 = \log_{x-y}(xy) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3xy$..2p

2.

a) Verifică $|z_1 + i| = |z_1 - i|$, deci $z_1 = 1 \in M$ 1p

Verifică $|z_2 + i| \neq |z_2 - i|$, deci $z_2 \notin M$ 1p

b) Observă $|i \cdot z + 1| = |i(z - i)| = |i| \cdot |z - i| = |z - i|$ 1p

$|i \cdot z - 1| = |i(z + i)| = |i| \cdot |z + i| = |z + i|$ 1p

Finalizare $|i \cdot z + 1| = |i \cdot z - 1| \Leftrightarrow |z + i| = |z - i|$, deci $z \in M$ 1p

c) Verificăm $M \subset \mathbb{R}$ și $\mathbb{R} \subset M$

Dacă $z = a + bi \in M \rightarrow |a + i(b + 1)| = |a + i(b - 1)|$, deci $b = 0$ iar $z \in \mathbb{R}$ 1p

Dacă $z = t \in \mathbb{R}$, atunci $|t + i| = |t - i|$ este adevărată, deci $z \in M$ 1p

3.

a) Obține $f(1) \cdot f(-1) = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = -1$ 2p

b) Obține $\sqrt[3]{2 + x\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - x\sqrt{5}} = \sqrt[3]{4}$ 1p

Prin ridicare la puterea a treia obține

$4 + 3 \cdot \sqrt[3]{4 - 5x^2} \cdot \sqrt[3]{4} = 4$ 1p

Finalizare : $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ 1p

c) De exemplu $t = 5\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ iar $f(t) = 3 \in \mathbb{N}$ 2p

4. Fie x este numărul pungilor de 1kg

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

y este numărul pungilor de 900 g

Atunci $x + y = 2n$ (număr par) și $1000x + 900y = 16800$ 2p

a) Dacă $y=2$, atunci $x=15$ iar $x+y = 17$, nu convine 2p

b) Obține $y=12$, $x=6$, deci în pachet sunt 18 pungi 3p

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI-A

1.

a) Verifică $A \cdot A^T = I_2$, deci A este ortogonală2p

b) Admitem că matricea B este ortogonală .

Atunci $B \cdot B^T = I_2 \Leftrightarrow \det(B \cdot B^T) = 1 \Leftrightarrow \det(B) = \pm 1$ 2p

c) Un exemplu îl constituie matricea $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in R$ 2p

Verificare: $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = I_2$ 1p

2.

a) Obține $D(a, b) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{vmatrix} = a^2 - a \cdot b + b^2$ 1p

Verifică $D(b, a) = b^2 - ba + a^2 = D(a, b)$ 1p

b) Obține $D(x, 1) \cdot D(x, -1) = (x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + 1$ 2p

Obține $D(x^2, -1) = x^4 + x^2 + 1$, deci relația este adevărată1p

c) Obține $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(\sqrt{x}, 1)}{\sqrt{D(x, 1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ 1p

Finalizare $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = 1$ 1p

3.

a) Verifică egalitatea $\frac{e^x}{x} - \frac{e^{x+1}}{x+1} = \frac{e^x \cdot (1+x - e \cdot x)}{x(x+1)}$ 2p

b) Studiem asimptotele verticale în $x_0 = 0$

$$\lim_{x \nearrow 0} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{x+1}}{x+1} \right) = -\infty, \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{x+1}}{x+1} \right) = +\infty$$

Așadar $x = 0$ este asimptotă verticală pentru graficul funcției1p

Studiem asimptotele verticale în $x_0 = -1$

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{x+1}}{x+1} \right) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{x+1}}{x+1} \right) = -\infty$$

Așadar $x = -1$ este asimptotă verticală pentru graficul funcției1p

c) Scrie $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \left(\frac{e}{1} - \frac{e^2}{2} \right) + \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{3} \right) + \dots + \left(\frac{e^n}{n} - \frac{e^{n+1}}{n+1} \right) \dots 1p$

Obține $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \left(e - \frac{e^{n+1}}{n+1} \right) \dots 1p$

Finalizare $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e - \frac{e^{n+1}}{n+1} \right) = -\infty \dots 1p$

4.

- a) Seria primei chitanțe este 1023 iar a ultimei chitanțe 9870.....2p
Au fost eliberate $9870 - 1022 = 8848$ chitanțe1p
- b) Obține numărul autoturismelor $75\% \cdot 8848 = 6636$ 2p
- c) Media zilnică este $8848 : 28 = 316$ autovehicule.....2p

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII-A

1.

a) Demonstrează echivalența

$$x \in M \Leftrightarrow |x-3| \geq 1 \dots\dots\dots 1p$$

b) Pentru $x, y \in M \Rightarrow |x-3| \cdot |y-3| \geq 1 \Rightarrow xy-3x-3y+9 \leq -1$ sau $xy-3x-3y+9 \geq 1$,
deci $xy-3x-3y+12 \leq 2$ sau $xy-3x-3y+12 \geq 4$, adică $x \circ y \in M \dots\dots\dots 1p$

c) Scrierea corectă și verificarea fiecăreia dintre cele trei axiome câte 1p $\dots\dots\dots 3p$

d) Scrie $U(M) = \{x \in M \mid \exists x' \in M \text{ a. i. } x \circ x' = 4\}$

Obține $x' = 3 + \frac{1}{x-3} \dots\dots\dots 1p$

Din condiția $x' \in M$ obține $U(M) = \{2, 4\} \dots\dots\dots 1p$

2.

a) Obține $A^2 = A, B^2 = B, A \cdot B = O_2, B \cdot A = O_2 \dots\dots\dots 2p$

b) Obține $E^3(a, b) = a^3 \cdot A + b^3 \cdot B \dots\dots\dots 1p$

Demonstrează $x^3 = x$, pentru orice $x \in Z_6 \dots\dots\dots 1p$

Finalizare $E^3(a, b) = E(a, b) \dots\dots\dots 1p$

c) Scrie $E(a, b)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(E(a, b)) \in U(Z_6) = \{\hat{1}, \hat{5}\} \dots\dots\dots 1p$

Finalizare : $\det(E(a, b)) = a \cdot b \in \{\hat{1}, \hat{5}\}, (a, b) \in \left\{ \left(\hat{1}, \hat{1} \right), \left(\hat{1}, \hat{5} \right), \left(\hat{5}, \hat{1} \right), \left(\hat{5}, \hat{5} \right) \right\} \dots\dots\dots 1p$

3.

a) Calculează $f(0) = \frac{1}{6}, \lim_{x \searrow 0} f(x) = \frac{1}{6}, \lim_{x \nearrow 0} f(x) = \frac{1}{3} + a \dots\dots\dots 1 p$

Dacă $a = -\frac{1}{6}$, atunci funcția este continuă în $x_0 = 0$, deci este continuă pe R și admite
primitive $\dots\dots\dots 1p$

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

b) Din relația
$$\frac{1}{(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)} = \frac{m}{(x+1)} + \frac{n}{(x+2)} + \frac{p}{(x+3)}$$

obține $m = -\frac{1}{2}, n = 1, p = -\frac{1}{2}$ 2p

O primitivă este

$F(x) = -\frac{1}{2} \ln(x+1) + \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x+3)$ 1p

c) Deoarece $x \in [0, 4]$ rezultă că $(x+1)(x+2)(x+3) \geq 6$, deci $f(x) \leq \frac{1}{6}$ 1p

Prin integrarea relației $f(x) \leq \frac{1}{6}$ se obține $\int_0^4 f(x) dx \leq \frac{2}{3}$ 1p

4.

Notăm cu l - lungimea traseului (în km)

v - viteza medie de deplasare (km/h)

t - durata deplasării (h)

Scrive $l + v + t = 304 \Leftrightarrow v \cdot t + v + t = 304$, iar l, v, t - numere naturale..... 2p

Obține $(v+1) \cdot (t+1) = 305$ 2p

Numai soluția $t=4, v=60$ convine1p

Finalizare : $l = v \cdot t = 240km$ 2p

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.