Clasa a X-a

Problema 1. Arătaţi că, dacă z este un număr complex, atunci $|1+z|+|1+z+z^2| \geq 1$. Când are loc cazul de egalitate ?

Laurenţiu Panaitopol

Soluţie. Dacă $|z| > 1$, atunci $|1+z| + |1+z+z^2| \geq |1+z+z^2-(1+z)| = |z^2| > 1$. **2p**

Dacă $|z| \leq 1$, atunci $|1+z|+|1+z+z^2| \geq |1+z|+1-|z+z^2| = 1+|1+z|(1-|z|) \geq 1$. **2p**

Egalitatea are loc când $|1+z+z^2| = 1-|z+z^2|$ şi $|1+z|(1-|z|) = 0$. Una din situaţiile în care aceasta se întâmplă este dacă $z = -1$ **1p**

Cealaltă situaţie are loc când $|z| = 1$, $z+z^2$ are argumentul π şi $|z+z^2| \leq 1$. Notând $a = \arg z$, aceasta revine la $\sin a + \sin 2a = 0$ şi $\cos a + \cos 2a \leq 0$. Cum $\sin a + \sin 2a = \sin a(1+2\cos a)$, rezultă posibilităţile $\sin a = 0, \cos a = -1$, corespunzând lui $z = -1$, şi $\cos a = -\frac{1}{2}$, corespunzând lui $z = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ **2p**

Problema 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale nenule ecuaţia $n^{x^n} + n^{\frac{x+1}{x}} = n\,(n+1)$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, impar.

Petre Guţescu, Tulcea

Soluţie. Pentru $x < 0$ nu avem soluţii, căci $n^{x^n} + n^{1+\frac{1}{x}} < n^0 + n^1 = 1+n < n(n+1)$. **2p**

Pentru $x > 0$, ecuaţia se scrie $n^{x^n} + n \cdot n^{\frac{1}{x}} = n(n+1)$.............................. **1p**

În baza inegalităţii mediilor, obţinem

$$n^{x^n} + n \cdot n^{\frac{1}{x}} = n^{x^n} + \underbrace{n^{\frac{1}{x}} + n^{\frac{1}{x}} + \ldots + n^{\frac{1}{x}}}_{n \text{ ori}} \geq$$

$$\geq (n+1) \sqrt[n+1]{n^{x^n} \cdot \underbrace{n^{\frac{1}{x}} \cdot n^{\frac{1}{x}} \cdot \ldots \cdot n^{\frac{1}{x}}}_{n \text{ ori}}} =$$

.... **2p**

$$= (n+1) \sqrt[n+1]{n^{x^n + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdots + \frac{1}{x}}} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{n^{(n+1)\sqrt[n+1]{x^n \cdot \frac{1}{x^n}}}} = n\,(n+1)\,.$$

Aşadar ecuaţia dată este caz de egalitate în şirul anterior de inegalităţi, adică $x^n = \frac{1}{x}$, deci $x = 1$ **2p**

Problema 3. Vom spune că o funcţie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ este *rapidă* dacă are proprietatea că $4f(n) = f(n-1) + f(n+1)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

a) Arătaţi că există funcţii care sunt rapide şi strict crescătoare.

b) Arătaţi că dacă o funcţie rapidă f ia valori egale în două puncte distincte, atunci există o infinitate de perechi de puncte distincte $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(a) = f(b)$.

Soluţie. a) Este suficient să găsim o funcţie f cu $f(0) = 0$ şi strict crescătoare pe $\mathbb{N}$ (în acest caz obţinem $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{Z}$ şi rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{Z}$). **1p**

Pentru aceasta, dacă luăm $f(1) = a > 0$, atunci $f(2) = 4a > 3f(1) > 0$ şi arătăm inductiv că $f(n+1) > 3f(n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (ceea ce asigură monotonia lui f): dacă $f(n) > 3f(n-1) > 0$, atunci $f(n+1) = 4f(n) - f(n-1) > 4f(n) - \frac{1}{3}f(n) > 3f(n) > 0$

.... **2p**

b) Să presupunem că $f(m) = f(n)$, $m < n$. Considerăm funcţia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+m) - f(n-x)$; observăm imediat că g este rapidă şi $g(0) = g(n-m) = 0$. Dacă presupunem prin absurd că $g(1) \neq 0$, atunci raţionamentul precedent arată că g este strict monotonă (crescătoare, dacă $g(1) > 0$ şi descrescătoare dacă $g(1) < 0$) – contradicţie cu $g(0) = g(n-m)$.

Astfel g este identic nulă, deci $f(x+m) = f(n-x), \forall x \in \mathbb{Z}$........................ **4p**

Observaţie. O altă abordare se poate baza pe faptul că valorile unei funcţii rapide verifică o recurenţă liniară, deci f este „de forma” $f(x) = A(2+\sqrt{3})^x + B(2-\sqrt{3})^x$, unde A, B sunt constante.

Problema 4. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 1} + \sqrt{\cos^2 y + \mathrm{tg}^2 y + 1} = \sqrt{\dfrac{20x}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \mathrm{ctg}^2 y + 1} + \sqrt{\cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x + 1} = \sqrt{\dfrac{20y}{x+y}} \end{cases}$$

Soluţie. Produsul membrilor drepţi ai ecuaţiilor este $P = 20\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y} \leq 10$

.... **2p**

Observăm apoi, folosind inegalitatea CBS, că

$$(\sin^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 1)(\cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x + 1) \geq \left(|\sin x \cos x| + \frac{1}{|\sin x \cos x|} \right)^2.$$

Cum $|\sin x \cos x| = \frac{1}{2}|\sin 2x| \leq \frac{1}{2}$ şi funcţia $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ este strict descrescătoare pe $(0, \frac{1}{2})$, deducem $(\sin^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 1)(\cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x + 1) \geq (2 + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$.

.... **2p**

Folosind inegalitatea mediilor şi relaţia precedentă, produsul membrilor stângi ai celor două ecuaţii este

$$P \geq 4\sqrt[4]{(\sin^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 1)(\cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x + 1)(\sin^2 y + \mathrm{ctg}^2 y + 1)(\cos^2 y + \mathrm{tg}^2 y + 1)} \geq 10$$

.... **2p**

Astfel, egalităţile nu pot avea loc decât dacă $x = y$ şi $|\sin 2x| = 1$, ceea ce duce la soluţiile $x = y = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

.... **1p**