CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA a VI-A, TULCEA, 29 martie2014

Soluții orientative şi bareme

Clasa a VII-a

Problema 1.

Se consideră numărul $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}$. Dacă $A=\frac{p}{q}$, unde $p,q\in\mathbb{N}^*$, arătați că numerele *p* şi *q* dau acelaşi rest la împărțirea cu 101.

***

Avem $A=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}\right)=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{99}\right)+...+\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{51}\right)=1+\frac{101\cdot m}{99!}$	**2p**
Numerele 101 şi $99!$ sunt prime între ele.	**2p**
Deoarece $A-1=\frac{p}{q}-1=\frac{101m}{99!}$, rezultă că $\frac{p-q}{q}=\frac{101m}{99!}$. Prin urmare, numărul $p-q$ se divide cu 101, adică *p* şi *q* dau acelaşi rest la împărțirea cu 101.	**3p**

Problema 2.

a) Arătați că, orice număr natural nenul *p*, se poate scrie sub forma $p=ab+bc+ca+1$, unde *a*, *b* şi *c* sunt numere naturale.

b) Arătați că, orice număr natural compus *n*, se poate scrie sub forma $n=xy+yz+zx+1$, unde *x*, *y* şi *z* sunt numere naturale nenule.

***

a) Numărul $p=1$ se obține, de exemplu, pentru $a=b=0$ şi *c* oarecare.	**1p**
Pentru $p\geq 2$ considerăm, de exemplu, $a=1$ şi $c=0$. Atunci $b+1=p$, de unde obținem $b=p-1$.	**2p**
b) Fie $n=pq$, unde *p* şi *q* sunt numere naturale mai mari ca 1.	**1p**
În egalitatea $pq=xy+yz+zx+1$, considerăm, de exemplu, $z=1$. Atunci $pq=xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$.	**2p**
Ca urmare, putem considera $x=p-1$ şi $y=q-1$.	**1p**

Problema 3.

Determinați toate perechile de numere reale (x,y), $1\leq x\leq y$, ştiind că $\frac{2x+1}{y}$ şi $\frac{2y+1}{x}$ sunt simultan numere naturale.

Prof. Mircea Fianu, Bucureşti

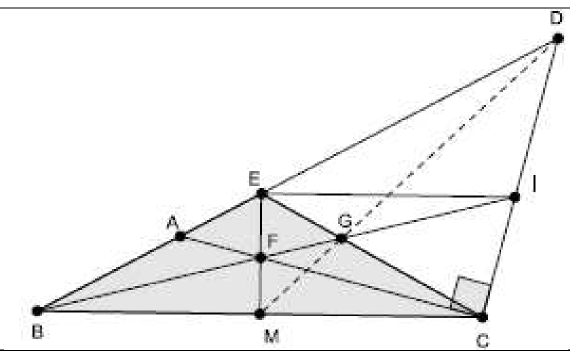
Avem $\frac{2x+1}{y}\cdot\frac{2y+1}{x}=\frac{2x+1}{x}\cdot\frac{2y+1}{y}=\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{y}\right)\in\mathbb{N}$. Deci $\frac{2x+1}{y}\cdot\frac{2y+1}{x}\in\{5,6,7,8,9\}$	**2p**
Cum $\frac{2x+1}{y}\leq\frac{2y+1}{x}$, analizăm pe rând variantele **1)** $\frac{2x+1}{y}=1$, $\frac{2y+1}{x}=5$,	**1p**

1) $\frac{2x+1}{y}=1, \frac{2y+1}{x}=5$, **2)** $\frac{2x+1}{y}=1, \frac{2y+1}{x}=6$, **3)** $\frac{2x+1}{y}=2, \frac{2y+1}{x}=3$, **4)** $\frac{2x+1}{y}=1, \frac{2y+1}{x}=7$, **5)** $\frac{2x+1}{y}=1, \frac{2y+1}{x}=8$, **6)** $\frac{2x+1}{y}=2, \frac{2y+1}{x}=4$, **7)** $\frac{2x+1}{y}=1, \frac{2y+1}{x}=9$, **8)** $\frac{2x+1}{y}=3, \frac{2y+1}{x}=3$. Obținem soluțiile: $(3,7), \left(\frac{3}{2},4\right), \left(2,\frac{5}{2}\right), (1,3), \left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right), \left(1,\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{5},\frac{11}{5}\right), (1,1)$	**4p**

Problema 4.

Se consideră triunghiul *ABC* în care $m\left(\widehat{ABC}\right)=2\cdot m\left(\widehat{ACB}\right)$, $m\left(\widehat{BAC}\right)>90^\circ$, iar punctul *M* este mijlocul laturii $[BC]$. Perpendiculara în punctul *C* pe dreapta *AC* intersectează dreapta *AB* în punctul *D*. Arătați că $\widehat{AMB}\equiv\widehat{DMC}$.

***

 Fie *E* punctul în care mediatoarea segmentului $[BC]$ intersectează dreapta *AB*. Cum triunghiul *EBC* este isoscel, înseamnă că semidreapta $(CA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ECB}$.	**1p**
Dacă $\{F\}=CA\cap EM$, atunci *F* este centrul cercului înscris în triunghiul *EBC*. Rezultă că $(BF$ este bisectoarea unghiului $\widehat{EBC}$.	**2p**
Cum $CD\perp CA$, înseamnă că $(CD$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{ECB}$ din triunghiul *EBC*. Dacă $\{I\}=BF\cap CD$, rezultă că $(EI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DEC}$.	**2p**
Dacă $\{G\}=BI\cap CE$, este suficient să arătăm că *D*, *G* și *M* sunt coliniare. Avem $\frac{ID}{IC}\cdot\frac{MC}{MB}\cdot\frac{EB}{ED}=\frac{ED}{EC}\cdot 1\cdot\frac{EC}{ED}=1$. Am folosit *teorema bisectoarei* în triunghiul *ECD*. Conform reciprocei *teoremei lui Ceva*, dreptele *DG*, *CE* și *BI* sunt concurente în *G* și cum dreptele *MD* și *MA* sunt simetrice în raport cu dreapta *ME*, rezultă $\widehat{AMB}\equiv\widehat{DMC}$..	**2p**