CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA a VI-A, TULCEA, 29 martie 2014

Soluții orientative și bareme

Clasa a VIII-a

Problema 1.
Determinați numerele naturale prime n pentru care numărul $N = n^4 + n^2 + 1$ are exact patru divizori naturali.

Prof. Tanța Costea, Tulcea, Mircea Fianu, București

Numărul N este de forma $p \cdot q$, unde p și q sunt numere prime diferite, sau de forma p^3, unde p este un număr prim.	**1p**
Avem $N = \left(n^2 - n + 1\right)\left(n^2 + n + 1\right)$. Dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor $n^2 - n + 1$ și $n^2 + n + 1$, atunci d este impar și d divide pe $2n$, deci d divide pe n. Înseamnă că $d \in \{1, n\}$. Cum n nu divide niciunul dintre numerele $n^2 - n + 1$ și $n^2 + n + 1$, rămâne că $d = 1$.	**2p**
Pentru $N = \left(n^2 - n + 1\right)\left(n^2 + n + 1\right) = p^3$ nu avem soluții deoarece numerele $n^2 - n + 1$ și $n^2 + n + 1$ sunt prime între ele și $1 < n^2 - n + 1 < n^2 + n + 1$.	**1p**
Dacă $N = \left(n^2 - n + 1\right)\left(n^2 + n + 1\right) = pq$, pentru $n = 2$ obținem $N = 3 \cdot 7$, iar pentru $n = 3$ obținem $N = 7 \cdot 13$. Dacă $n \ge 5$, atunci $n = 3k \pm 1, k \ge 2$. În fiecare din cazuri unul dintre factorii lui N este divizibil cu 3 și mai mare decât 3. Deci nu mai avem soluții. În final, $n \in \{2, 3\}$.	**3p**

Problema 2.
Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care $m\left(\widehat{AC';(BCB')}\right) = 30^\circ$.

Arătați că măsura unghiului dintre planele (ABD') și (ADC) este egală cu măsura unghiului dintre planele (ABD') și $(AA'C)$.

***

Considerăm $AB = a$. Cum $m\left(\widehat{AC';(BCB')}\right) = m\left(\widehat{AC'B}\right) = 30^\circ$, avem $BC' = a\sqrt{3}$ și $CC' = a\sqrt{2}$.	**1p**
Deoarece $(ABD') \cap (ABC) = AB$, $m\left(\widehat{(ABD'),(ABC)}\right) = m\left(\widehat{C'BD}\right)$ și $\sin\widehat{C'BD} = \dfrac{CC'}{BC'} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. (1)	**2p**
Avem $(ABD') \cap (ACC') = AC'$. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Ducem $OE \perp AC'$, $E \in AC'$. Deoarece $BO \perp (ACC')$, rezultă din *teorema celor*	**2p**

trei perpendiculare că $BE \perp AC'$. Prin urmare, $m\left(\widehat{(ABD'),(ACC')}\right) = m\left(\widehat{BEO}\right)$.	
În triunghiul dreptunghic BOE avem $BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ şi $BE = \frac{BC'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Prin urmare, $\sin \widehat{BEO} = \frac{BO}{BE} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. (2) Din (1) şi (2) rezultă concluzia.	**2p**

Problema 3.
a) Se consideră numerele reale a, b şi c care verifică simultan egalităţile $a+b+c=2$ şi $ab+bc+ca=1$. Dacă $a=\frac{4}{3}$, determinaţi numerele b şi c;
b) Dacă numerele reale x, y şi z verifică simultan egalităţile $x+y+z=2$ şi $xy+yz+zx=1$, arătaţi că $x, y, z \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

***

a) Pentru $a=\frac{4}{3}$, obţinem $b+c=\frac{2}{3}$ şi $bc=1-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$. Cum $(b-c)^2=(b+c)^2-4bc=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}=0$, rezultă că $b=c=\frac{1}{3}$.	**2p**
b) Mai întâi, $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=2$.	**1p**
Obţinem $x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1=1$, adică $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. Deducem că $x, y, z \geq 0$. (1)	**2p**
Pe de altă parte, $x^2+y^2+z^2-\frac{2}{3}(x+y+z)+\frac{1}{3}=1$, adică $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=1$. Obţinem $\left\lvert x-\frac{1}{3}\right\rvert \leq 1$, de unde $x \leq \frac{4}{3}$ şi, analog, $y \leq \frac{4}{3}$, $z \leq \frac{4}{3}$. (2) Din (1) şi (2), rezultă concluzia.	**2p**

Problema 4.
Determinaţi numerele naturale a şi b şi numărul prim p astfel încât $2^a+3^b=p^2$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

1. Dacă $a=0$, atunci $p^2=3^b+1$, deci p este par; rezultă $p=2$ şi $(a;b;p)=(0;1;2)$.	**1p**

2. Dacă $a=1$ obținem $p^2=3^b+2$. **a.** Pentru b par, adică $b=2l$, cu $l\in\mathbb{N}$, rezultă $\left(p-3^l\right)\left(p+3^l\right)=2$, fals, deoarece numerele $p-3^l$ şi $p+3^l$ au aceeaşi paritate. **b.** Pentru b impar, adică $b=2l+1$, cu $l\in\mathbb{N}$, rezultă $p^2-1=4\cdot\left(\underbrace{3^{2l}+3^{2l-1}+\ldots+3+1}_{\text{impar}}\right)$, fals, deoarece $p^2-1\equiv 0\pmod 8$, pe când membrul drept este divizibil cu 4, dar nu şi cu 8.	**1p**
3. Dacă $a\geq 2$ atunci $2^a\equiv 0\pmod 4$ şi cum $p^2\equiv 1\pmod 4$, pentru orice număr prim $p\geq 3$, din ecuație obținem că $3^b\equiv(-1)^b\equiv 1\pmod 4$, adică b trebuie să fie par; prin urmare $b=2c$, cu $c\in\mathbb{N}$ şi ecuația devine $\left(p-3^c\right)\left(p+3^c\right)=2^a$, deci $\begin{cases}p-3^c=2^x\\ p+3^c=2^y\end{cases}$, cu $0\leq x<y\leq a$ şi $x+y=a$. Rezultă de aici că $2\cdot 3^c=2^y-2^x$, deci $x\neq 0$ şi $3^c=2^{y-1}-2^{x-1}=2^{x-1}\left(2^{y-x}-1\right)$; aşadar obținem $2^{x-1}\mid 3^c$, adică $x=1$ şi deci $y=a-1\geq 1$. Prin urmare $p=2+3^c=2^{a-1}-3^c$, adică $3^c=2^{a-2}-1$, unde $a\geq 2$.	**2p**
a. Pentru $a=2$ se obține o afirmație falsă. **b.** Pentru $a=3$, din ultima egalitate rezultă $c=0$, deci $(a;b;p)=(3;0;3)$. **c.** Pentru $a\geq 4$, ținând cont că $2^{a-2}\equiv 0\pmod 4$, din ecuația $3^c=2^{a-2}-1$ va rezulta că $3^c\equiv(-1)^c\equiv -1\pmod 4$, deci c trebuie să fie impar, adică $c=2s+1$, cu $s\in\mathbb{N}$; aşadar $3^{2s+1}+1=2^{a-2}\Leftrightarrow 2^{a-2}=4\cdot\left(3^{2s}+3^{s-1}+\ldots+3+1\right)\Leftrightarrow\underbrace{3^{2s}+3^{2s-1}+\ldots+3+1}_{\text{impar}}=2^{a-4}$ de unde concluzionăm că $\begin{cases}2^{a-4}=1\\ s=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ c=1\end{cases}$ şi, prin urmare, $(a;b;p)=(4;2;5)$. Aşadar ecuația dată are soluțiile: $(a;b;p)\in\{(0;1;2),(3;0;3),(4;2;5)\}$.	**3p**