Clasa a IX-a

Problema 1. Se consideră hexagonul $ABCDEF$ şi punctele M, N, P, Q, R, S – mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, respectiv $[FA]$.

Arătaţi că $NR^2 = MQ^2 + PS^2$ dacă şi numai dacă $MQ \perp PS$.

Laurenţiu Panaitopol

Soluţie. Observăm că

$$\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FR} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{ER},$$

deci

$$2\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}.$$

Analog deducem

$$2\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF},$$
$$2\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE},$$

de unde $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PS}$. **4p**

Considerăm acum un triunghi (eventual degenerat) XYZ cu $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{PS}$ şi avem $\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{NR}$. În acest triunghi relaţia $NR^2 = MQ^2 + PS^2$ revine la $XZ^2 = XY^2 + YZ^2$, ceea ce are loc dacă şi numai dacă $XY \perp YZ$, i.e. $MQ \perp PS$. **3p**

Problema 2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care verifică relaţia

$$2014 f\left(f(x)\right) + 2013 f(x) = x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{Z}.$$

Petre Guţescu, Tulcea

Soluţie. Observăm că funcţia dată de $f(x) = -x$ convine **1p**

Adunând $f(x)$ în ambii membri obţinem

$$f(x) + x = 2014\big(f(f(x)) + f(x)\big).$$

. . . . **2p**

Dacă înlocuim în relaţia anterioară pe x cu $f(x)$ rezultă

$$f\left(f(x)\right) + f(x) = 2014\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right) + f\left(f(x)\right)\right) \text{ deci}$$
$$f(x) + x = 2014^2\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right) + f\left(f(x)\right)\right).$$

Repetând procedeul va rezulta că

$$f(x) + x = 2014^n \left(\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{\text{de } n+1 \text{ ori}}(x) + \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori}}(x) \right).$$

. . . . **2p**

Din ultima relaţie concluzionăm că

$$2014^n \mid f(x) + x,$$

pentru orice număr natural nenul n, prin urmare este necesar ca $f(x) + x = 0$, de unde $f(x) = -x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$. **2p**

Abordare alternativă. Dacă pentru $a \in \mathbb{Z}$ definim şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ prin $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$, atunci $2014 a_{n+1} + 2013 a_n = a_{n-1}$ pentru $n \geq 1$. Din recurenţa liniară rezultă că există constantele A, B astfel încât $a_n = A(-1)^n + B(\frac{1}{2014})^n, \forall n \in \mathbb{N}$, iar observaţia că a_n este întreg oricare ar fi n implică $B = 0$. Deducem $a_1 = -a_0$, adică $f(a) = -a$.

Problema 3. Arătaţi că pentru orice numere $a, b, c \in (0, 1)$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \geq \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca}.$$

Dorel Ţigău, Tulcea

Soluţie. Din inegalitatea mediilor avem succesiv

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\geq\frac{2}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}=\frac{2}{\sqrt{1+a^2b^2-(a^2+b^2)}}$$

.... **3p**

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\geq\frac{2}{\sqrt{1+a^2b^2-2ab}}=\frac{2}{|\,ab-1\,|}=\frac{2}{1-ab}. \tag{1}$$

.... **2p**

Sumând ciclic cele trei inegalităţi de tipul (1), rezultă concluzia. **2p**

Abordare alternativă. Inegalitatea (1) se poate demonstra şi direct, sau se poate folosi

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2}\geq\frac{2}{1-\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{2}{1-ab}.$$

Problema 4. Pentru o secvenţă $s=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ de $n\geq 2$ numere reale vom numi *succesorul* acesteia secvenţa $s'=(a_1,a_1+a_2,a_2,a_2+a_3,a_3,\ldots,a_{n-1},a_{n-1}+a_n,a_n)$, obţinută prin adăugarea între orice doi termeni consecutivi ai secvenţei s a sumei acestora. De exemplu, pornind de la secvenţa $s=(3,5)$ obţinem succesorul $s'=(3,8,5)$, care, la rândul lui, are succesorul $s''=(3,11,8,13,5)$, etc.

Dacă formăm şirul de secvenţe $(s_n)_{n\geq 1}$ în care $s_1=(1,2,3,\ldots,1000)$ şi s_{n+1} este succesorul lui s_n pentru $n\geq 1$, aflaţi numărul apariţiilor lui 2000 în secvenţa s_{1000}.

Soluţie. Vom considera perechile (a,b) de termeni consecutivi ai fiecărei secvenţe s_n, $n\geq 1$ (luaţi în ordinea în care apar în secvenţa respectivă). Observăm inductiv că orice astfel de pereche este alcătuită din numere naturale nenule distincte, prime între ele; în continuare vom considera numai astfel de perechi. **2p**

Să studiem în ce condiţii apare perechea (a,b) în secvenţa s_n, $n\geq 2$. Observăm că aceasta se petrece dacă şi numai dacă în secvenţa s_{n-1} apare perechea $(a-b,b)$ dacă $a>b$, respectiv $(a,b-a)$ dacă $b>a$. Asocierea $\mathcal{A}:(a,b)\mapsto(\alpha,\beta)$ între o pereche (a,b) a secvenţei s_n, $n\geq 2$ şi perechea (α,β) (a secvenţei s_{n-1}) din care provine (a,b) corespunde unui pas din algoritmul lui Euclid aplicat pentru aflarea celui mai mare divizor comun al numerelor a,b. Considerând că algoritmul constând în aplicarea repetată a lui $\mathcal{A}$ se opreşte când ajungem prima oară la o pereche cu o componentă 1, deducem că:

• dacă algoritmul se opreşte după k paşi la o pereche de forma $(1,m)$, $m\geq 2$, atunci perechea (a,b) apare exact o dată, şi anume în secvenţa s_{k+m-1} (deoarece perechea $(1,m)$ apare exact o dată, şi anume în secvenţa s_{m-1});

• dacă algoritmul se opreşte după k paşi la o pereche de forma $(m,1)$, $2\leq m\leq 999$, atunci la pasul precedent a fost perechea $(m,m+1)$, iar (a,b) apare exact o dată, şi anume în secvenţa s_{k-1} (deoarece perechea $(m,m+1)$ apare exact o dată, şi anume în secvenţa s_1);

• dacă algoritmul se opreşte la o pereche de forma $(m,1)$, $m\geq 1000$, atunci perechea (a,b) nu apare niciodată (deoarece perechea $(m,1)$ nu apare niciodată). **2p**

Constatăm astfel că 2000 apare în s_{1000} de tot atâtea ori de câte ori apar în $s_1,s_2,\ldots,s_{999}$ perechi (a,b) cu $a+b=2000$:

• perechea $(1,1999)$ apare în s_{1998}, iar perechea $(1999,1)$ nu apare deloc;

• deoarece dacă $a,b\geq 2$ oprirea algoritmului descris anterior se produce după cel mult $\frac{a+b}{2}$ iterări ale lui $\mathcal{A}$ (fiecare iterare scade suma termenilor perechii cu 2), iar aplicarea algoritmului unei astfel de perechi nu se poate termina cu o pereche de forma $(m,1)$ cu $m\geq 1000$ (ar rezulta că perechea precedentă ar fi $(m+1,m)$, cu $2m+1\leq 2000$), reiese că fiecare astfel de pereche apare.

Astfel, numărul de apariţii ale lui 2000 în s_{1000} este $\varphi(2000)-2=2^3\cdot 5^2\cdot 4-2=798$.

.... **3p**