CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a X-a

filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţe ale naturii

Barem de corectare şi notare

Subiectul I

1. Dacă $90^a = 2$, $90^b = 5$, arătaţi că $18^{\frac{a+b-1}{2(b-1)}} \in N^*$
2. Dacă $x = \lg a$, $y = \log_6 a$, $z = \log_{15} a$, atunci $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+\frac{1}{\log_5 a}$, $a \in (1,\infty)$

Soluție

1. $90^a = 2 \Rightarrow a = \log_{90} 2$ şi $90^b = 5 \Rightarrow b = \log_{90} 5$ 1p

$\frac{a+b-1}{2(b-1)} = \log_{18} 3$ 2p

$18^{\frac{a+b-1}{2(b-1)}} = 3 \in N^*$ 1p

2. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \log_a 30$ 2p

$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+\frac{1}{\log_5 a} = \log_a 30$ 1p

Subiectul II

1. Să se arate că $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \in Q$
2. Dacă $a,b \in R, b \geq 0$ şi $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} = 2$, să se arate că $27b = (a-1)(a+8)^2$

Soluție

1. $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \Rightarrow x^3 = 14 - 3x$ 2p

$x^3 + 3x - 14 = 0 \Rightarrow x = 2$ sau $x^2 + 2x + 7 = 0$ cu $\Delta < 0$ ----1p

2. Ridicare la puterea a 3-a $\Rightarrow 3\sqrt[3]{a^2 - b} = 4 - a$ 2p

Ridicare la puterea a 3-a şi finalizare calcule 2p

Subiectul III

1. Fie $z \in C$ astfel încât $|z| = 1$. Să se arate că $\frac{z^n}{1+z^{2n}} \in R$, $n \in N^*$
2. Fie $z \in C - \{\pm 1\}$. Să se arate că $\frac{z-1}{z+1}$ este pur imaginar $\Leftrightarrow |z| = 1$
3. Fie $z \in C$ astfel încât $|z| < \frac{1}{3}$. Să se arate că $\left|(\sqrt{2} - i)z^3 - iz\right| < \frac{3}{4}$

Soluție

1. $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$...1p

$\overline{\left(\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right)} = \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ 1p

Deci $\frac{z^n}{1+z^{2n}} \in R$ 1p

2. $\frac{z-1}{z+1}$ pur imaginar $<=> \overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = -\frac{z-1}{z+1} <=> \frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} + \frac{z-1}{z+1} = 0$ ...1p

Prin calcule, echivalenţa devine $z\overline{z} = 1 <=> |z| = 1$.............1p

3. $\left|(\sqrt{2}-i)z^3 - iz\right| \le \sqrt{3}|z|^3 + |z|$..........................1p

$\sqrt{3}|z|^3 + |z| < \frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{3} < \frac{3}{4}$..........................1p

Subiectul IV

Ecuaţia $z^2 + az + \frac{1}{3}(\alpha^2 + a\alpha + a^2) = 0, a, \alpha \in C$ are rădăcinile z_1, z_2. Să se arate că z_1, z_2 şi α sunt afixele vărfurilor unui triunghi echilateral.

Soluție

$\Delta = \left[\frac{i}{\sqrt{3}}(a+2\alpha)\right]^2$. 2p

$z_{1,2} = \frac{-a\sqrt{3} \pm i(a+2\alpha)}{2\sqrt{3}}$ 1p

$|z_1 - z_2| = \frac{|a+2\alpha|}{\sqrt{3}}$ 1p

$|z_1 - \alpha| = \frac{|a+2\alpha|}{\sqrt{3}}$ 1p

$|z_2 - \alpha| = \frac{|a+2\alpha|}{\sqrt{3}}$ 1p

$|z_1 - z_2| = |z_1 - \alpha| = |z_2 - \alpha| => A(z_1), B(z_2), C(\alpha)$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral 1p

Notă:
Orice soluţie corectă diferită de cea din barem primeste punctaj maxim.