CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a X-a

filiera tehnologică : profil tehnic, toate specializările

filiera tehnologică: profil servicii, specializarea resurse naturale și protecția mediului

Barem de corectare și notare

Subiectul I

Fie $x \in Z$ și $E(x) = \dfrac{2}{4^x + 2}$.

a) Calculați $E(-1)$, $E(0)$ și $E(1)$;

b) Arătați că $E(1-x) + E(x) = 1$, oricare ar fi $x \in Z$;

c) Calculați suma $S = E(-99) + E(-98) + \ldots + E(100)$.

Soluție

a) $E(-1) = \dfrac{2}{\frac{1}{4}+2} = \dfrac{8}{9}$.................1p

$E(0) = \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3}$....................1p

$E(1) = \dfrac{2}{4+2} = \dfrac{1}{3}$.....................1p

b) $E(1-x) = \dfrac{2}{4^{1-x}+2} = \dfrac{4^x}{2+4^x}$...................1p

$E(1-x) + E(x) = \dfrac{4^x}{2+4^x} + \dfrac{2}{4^x+2} = 1, \forall x \in Z$.............1p

c) $E(-99) + E(100) = 1, E(-98) + E(99) = 1, \ldots, E(-1) + E(0) = 1$.........................1p

S=100..1p

Subiectul II

a) Fie $a = \log_{30} 3$ și $b = \log_{30} 5$. Calculați $\log_{30} 8$ în funcție de a și b.

b) Fie $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ și $n \in N^*$. Arătați că:

$$\frac{1}{\log_a 3 \cdot \log_a 9} + \frac{1}{\log_a 9 \cdot \log_a 27} + \ldots + \frac{1}{\log_a 3^n \cdot \log_a 3^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{\log_a^2 3}$$

Soluție

a) $a = \dfrac{\lg 3}{\lg 30} = \dfrac{\lg 3}{\lg 3 + 1} \Rightarrow \lg 3 = \dfrac{a}{1-a}$...........................1p

$b = \dfrac{\lg 5}{\lg 30} = \dfrac{\lg 5}{1 + \lg 3} \Rightarrow \lg 5 = \dfrac{b}{1-a}$.............................1p

$\log_{30} 8 = \dfrac{\lg 8}{\lg 30} = \dfrac{3\lg 2}{1+\lg 3} = \dfrac{3(1-\lg 5)}{1+\lg 3}$.........................1p

$\log_{30} 8 = \dfrac{3(1-\frac{b}{1-a})}{1+\frac{a}{1-a}} = 3(1-a-b)$.............................1p

b) $\dfrac{1}{\log_a^2 3}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right) =$ 1p

$= \dfrac{1}{\log_a^2 3}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) =$ 1p

$= \dfrac{n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{\log_a^2 3}$...1p

Subiectul III

a) Fie $z \in C$. Arătați că dacă $|z| = \sqrt{2}$, atunci $\frac{z+2}{z} = 1 + \bar{z}$.

b) Determinați $a \in R$ astfel încât numărul $z = \frac{i+\sqrt{2}}{a-i+ai}$ să fie număr real.

Soluție

a) $\frac{z+2}{z} = 1 + \frac{2}{z} = 1 + \frac{2\bar{z}}{|z|^2}$....................................$1p$

$= 1 + \frac{2\bar{z}}{\sqrt{2^2}} = 1 + \bar{z}$..$1p$

b) $z = \frac{i+\sqrt{2}}{a+i(a-1)} = \frac{(\sqrt{2}+i)(a-i(a-1))}{a^2+(a-1)^2}$.......................$1p$

$z = \frac{a\sqrt{2}+a-1}{a^2+(a-1)^2} + i\frac{a-a\sqrt{2}+\sqrt{2}}{a^2+(a-1)^2}$................................$1p$

$z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}$....................................$1p$

$a - a\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$......................................$1p$

$a = 2 + \sqrt{2}$

Subiectul IV

a) Determinați $n \in N$ pentru care are loc egalitatea:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 10.$$

b) Fie $x \in N$ și $y \in R_+$, astfel încât $x + y = 3 + \sqrt{2}$. Arătați că $\frac{2x+y}{x+4y} \le \frac{7\sqrt{2}+2}{8}$.

Soluție

a) $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$..........................$1p$

Calculul sumei: $-1 + \sqrt{n+1}$....................................1p

$\sqrt{n+1} = 11 \Rightarrow n = 120$..$1p$

b) $\frac{2x+y}{x+4y} = \frac{x+3+\sqrt{2}}{3y+3+\sqrt{2}}$....................................$1p$

$x \in N,\ y \in R_+ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3+\sqrt{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2+\sqrt{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1+\sqrt{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = 3 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = 4 \\ y = \sqrt{2}-1 \end{cases}$.........$2p$

$\frac{x+3+\sqrt{2}}{3y+3+\sqrt{2}} \le \frac{4+3+\sqrt{2}}{3(\sqrt{2}-1)+3+\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}+2}{8}$..$1p$

(s-a ales solutia cu x maxim si y minim)