

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”**

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a XI-a

 filiera teoretică: profil real, specializarea științe ale naturii
Barem de corectare și notare
**Subiectul I** Fie  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A \in M_2(\mathbb{R})$ 

- Să se arate că există  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $A^2 = aA$
- Să se calculeze  $(A - A^t)^{2013}$
- Să se rezolve ecuația  $X^5 = A, X \in M_2(\mathbb{R})$

**Soluție**

- $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$  .....1p,  $a = 3$  .....1p
- Calculul  $A - A^t = B$  .....1p,  $B^4 = I_2$  .....1p,  $B^{2013} = B$  .....1p
- $\det X = 0$  și  $X^5 = t^4 X$ ,  $t = \text{Tr}A$  .....1p,  $t = \sqrt[5]{3}, X = \frac{1}{\sqrt[5]{3^4}} A$  .....1p

**Subiectul II** Fie  $A(k) = \begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ 1 & k & 2k \\ 2k & 1 & k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}^*, A(k) \in M_3(\mathbb{R})$ 

- Aflați  $\det(A(k))$
- Calculați  $\sum_{k=1}^n \det(A(k))$

**Soluție**

- Calculul  $\det(A(k))$  .....3p
- $\sum 1, \sum k^2, \sum k^3$  .....3p, finalizare .....1p

**Subiectul III** a. Calculați  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} + e^{x^2-3x+2} - 2}{x^2 - 4x + 3}$ 

 b. Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^6 + x^2 + 1)}$ 

 c. Determinați  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + ax^2} - \sqrt{x^2 - ax}) = 1$ 

**Soluție**

- Scrierea fracției de sub limită ca sumă de două fracții ---1p, calcul și finalizare  $l = -\frac{1}{2}$  .....1p

- Factor comun forțat la numărător și numitor și aplicarea proprietăților logaritmulor .....1p

 Finalizare  $l = \frac{1}{3}$  .....1p

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ (\sqrt[3]{x^3 + ax^2} - x) + (x - \sqrt{x^2 - ax}) \right]$  .....1p, amplificare cu conjugata .....1p, Finalizare .....1p

**Subiectul IV** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{m^2 x^2 + mx + 1}, & x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} + |m|\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ 

 Dacă  $A = \{m \in \mathbb{R} / \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)\}$ 

- Aflați  $A$
- Determinați numărul  $\alpha = \sum_{m \in A} m^2$

**Soluție** Calculul limitelor laterale în 1 .....1p, Egalarea limitelor laterale .....1p, Rezolvarea ecuației .....2p

 $A = \left\{ -1, \frac{3}{5} \right\}$  .....1p,  $\alpha = \frac{34}{25}$  .....2p

Notă: Orice soluție corectă diferită de cea din barem primește punctaj maxim.