CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală – Constanța, 23.02.2014
Clasa a XI-a
filiera tehnologică : profil tehnic, toate specializările
filiera tehnologică: profil servicii, specializarea resurse naturale și protecția mediului

Barem de corectare și notare

Subiectul I

a) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathrm{R})$, calculați $det(I_3 + A + A^2 + A^3)$.

b) Dacă $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathrm{R})$, aflați B^n.

Soluție a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 17 \\ 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 61 \\ 0 & 8 & 48 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ …………………………………………………… 1p

$I_3 + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 22 & 81 \\ 0 & 15 & 68 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ ……………………………………………………… 1p

$det(I_3 + A + A^2 + A^3) = 900$ …………………………………………………………… 1p

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ …………………………………………………………………… 1p

$B^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3n-1 \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ …………. 1p, Demonstrația prin inducție matematică……………………... 2p

Subiectul II

În reperul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}, \frac{2n}{n^2+1}\right), n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că punctele A_n se găsesc pe curba de ecuație $x^2 + y^2 = 1$.
b) Aflați aria triunghiului $A_0A_1A_2$.
c) Verificați dacă există $n \in \mathrm{N}$ astfel încât aria triunghiului $A_0A_1A_n$ să fie egală cu 1 (u.a.).

Soluție a) Verificare ……………………………………………………………………..2p

b) $A = \frac{2}{5}$ ………………………………………………………………………..2p

c) $\left|\frac{n^2-n}{n^2+1}\right| = 1$……………...1p, $n = -1 \notin \mathbb{N}$ ……………1p, $(\nexists)\, n \in \mathbb{N}$ ……………...…1p

Subiectul III

Fie funcția $f: \mathbb{R} - \{-c\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+c}$.

Determinați a, b, c astfel încât graficul funcției să aibă ca asimptote dreptele de ecuație $x = 1$ și $y = x + 2$ iar punctul $P(2,6)$ să aparțină graficului funcției.

Soluție $-c = 1 \Rightarrow c = -1$ …2p, $m = 1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ …..1p, $n = 2 = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = a + 1 \Rightarrow a = 1$ …2p

$f(2) = 6 \Rightarrow b = 0$ ……………………………………………………………………2p

Subiectul IV
Calculați:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax\cdot\cos 3ax}{x^2}$, $a>0$.

Soluție

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$ ……………………………………………………..……………….…….3p

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2ax)+(1-\cos 4ax)}{2x^2}$ ……………..…………………………..……………………..……...1p

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\sin^2 ax+\sin^2 2ax)}{2x^2}$ …………….………..…………………………..……………………….....1p

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(a^2\frac{\sin^2 ax}{a^2x^2}+4a^2\frac{\sin^2 2ax}{4a^2x^2}\right)=$………..………………………………………………..……...1p

$=5a^2$ ………….………………………………………………………………...…………………......1p