CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală – Constanța, 23.02.2014
Clasa a XII-a
filiera teoretică: profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de corectare și notare

Subiectul I

Fie mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix} / \ x\in \mathbb{R}^*\right\}$. Arătați că:

a) G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) $(G,\cdot)$ este grup comutativ.

c) $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ izomorf cu $(G,\cdot)$.

Soluție: a) Daca $A,B\in G$ atunci $A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix}$, $A(y)=\begin{pmatrix} 2-y & 1-y \\ 2(y-1) & 2y-1 \end{pmatrix}$, unde x,y $\in \mathbb{R}^*$

Se verifica usor ca $A(x)A(y)=\begin{pmatrix} 2-xy & 1-xy \\ 2(xy-1) & 2xy-1 \end{pmatrix}$ cu $xy\in \mathbb{R}^*$

Observam ca $A(xy)=A(x)A(y)$ **2p**

b) Verificarea asociativitatii

Existenta elementului neutru: $A(1)=I_2$ **1p**

Oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^*$ $A(x)A\left(\frac{1}{x}\right)=A\left(\frac{1}{x}\right)A(x)=A\left(x\frac{1}{x}\right)=A(1)=I_2$ Asadar orice element al lui G este inversabil . Cum $A(x)A(y)=A(y)A(x)$, $(G,\cdot)$ este grup abelian. **1p**

c) Se considera functia $f:\mathbb{R}^*\to G, f(x)=A(x)$ **1p**

Verificarea injectivitatii

Verificarea surjectivitatii **1p**

Cum $f(xy)=A(xy)=A(x)A(y)=f(x)f(y)$ $\forall$ x,y $\in\mathbb{R}^*$, conditia de izomorfism este complet verificata. **1p**

Subiectul II

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru e si $a,b\in G$ astfel incat $aba^{-1}=b^5$ si $a^3=e$. Aratati ca:

a) $b^{125}=b$

b) $b^{2014}=b^{30}$.

Solutie:

$$b^{125}=\left(b^5\right)^{25}=\left(\left(aba^{-1}\right)^5\right)^5=\left(aba^{-1}aba^{-1}aba^{-1}aba^{-1}aba^{-1}\right)^5=$$

$$=\left(ab^5a^{-1}\right)^5=\left(aaba^{-1}a^{-1}\right)^5=\left(a^2ba^{-2}\right)^5=$$

$$=a^2ba^{-2}a^2ba^{-2}a^2ba^{-2}a^2ba^{-2}a^2ba^{-2}=a^2b^5a^{-2}=$$

$$=a^2aba^{-1}a^{-2}=a^3ba^{-3}=eba^{-3}=ba^{-3}$$ **4p**

Asadar $b^{125}=ba^{-3} \Rightarrow b^{124}=a^{-3} \Rightarrow b^{124}=e \Rightarrow b^{125}=b$. **1p**

b) Din $b^{124}=e \Rightarrow b^{2014}=\left(b^{124}\right)^{16}b^{30}=b^{30}$ **2p**

Subiectul III

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă. Calculaţi : $\int \frac{f'(x)}{f(x)[1+f^3(x)]}dx$.

Solutie:

Substitutia $f^3(x)=t$, $dt=3f^2(x)f'(x)dx$. **2p**

$3F(x)=\int \frac{3f^2(x)f'(x)dx}{f^3(x)\left[1+f^3(x)\right]}$. **2p**

Calculul se reduce la calcularea primitivei $\int \frac{dt}{t(t+1)}=\ln|t|-\ln|t+1|+C=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C$ **2p**

Asadar $F(x)=\frac{1}{3}\ln\frac{f^3(x)}{f^3(x)+1}+C$ **1p**

Subiectul IV

Calculaţi: $I=\int \frac{2n!\,\sin x+x^n}{e^x+\sin x+\cos x+P_n(x)}dx, x\in I\subset \mathbb{R}$,

unde $P_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}, n\in \mathbb{N}^*$.

Solutie:

Fie $f:I\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+\sin x+\cos x+P_n(x)$ **1p**

Cum $P_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}, n\in\mathbb{N}^*$ si $P_n'(x)=P_n(x)-\frac{x}{n!}$, $n\in\mathbb{N}^*$ **1p**

$$f'(x)=e^x+\cos x-\sin x+P_n'(x)=e^x+\cos x-\sin x+P_n(x)-\frac{x^n}{n!}=$$

$$=e^x+\sin x+\cos x+P_n(x)-2\sin x-\frac{x^n}{n!}=$$

$$=f(x)-2\sin x-\frac{x^n}{n!}=f(x)-\frac{2n!\sin x+x^n}{n!}$$

$$n!\left[f(x)-f'(x)\right]=2n!\sin x+x^n$$

....**3p**

Asadar : $I=n!\int\frac{f(x)-f'(x)}{f(x)}dx=n!\left[x-\ln|f(x)|\right]+C$ **2p**