CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a XII-a

filiera teoretică: profil umanist, toate specializările

Subiectul I Fie $E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ si multimea $M=\{A\in M_2(R)/\,AE=EA\}$.

Aratati ca: a) Pentru orice matrice $A\in M, \exists a,b\in R$ astfel încât $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.

b) $E^2=-I_2$ *si* pentru $\forall A\in M$ se poate scrie unic sub forma $A=aI_2+bE(a,b\in R)$

Soluție

a) Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Daca $A\in M \Rightarrow AE=EA \Rightarrow \begin{pmatrix}-b & a\\ -d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ -a & -b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c=-b\\ d=a\end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ 3p

b) $E^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2$ 1p

Fie $A\in M \Rightarrow \exists a,b\in R$ a.i. $A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ Dar $aI_2+bE=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\Rightarrow A=aI_2+bE$. 3p

Subiectul II Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & 6 & 8\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}$. Aflati $X\in M_3(R)$ a.i. $X+{}^tX=A$.

Soluție Fie $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a=2\\ b+d=4\\ c+g=6\\ 2e=6\\ f+h=8\\ 2i=10\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & b & c\\ 4-b & 3 & f\\ 6-c & 8-f & 5\end{pmatrix}, b,c,f\in R$

1p + 2p + 4p

Subiectul III Fie $a\in R$ si $X(a)=\begin{pmatrix}1+2a & a\\ -2a & 1-a\end{pmatrix}$.

a) Aratati ca $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab), \forall a,b\in R$.

b) Calculati $X^5(1)$.

Soluție a) $X(a)\cdot X(b)=\begin{pmatrix}1+2b+2a+2ab & b+2ab+a-ab\\ -2a-4ab-2b+2ab & -2ab+1-b-a+ab\end{pmatrix}=X(a+b+ab)$.... 3p

b) Pentru a=b $\Rightarrow X^2(a)=X(2a+a^2)$....... 1p, $X^4(a)=X(a^4+4a^3+6a^2+4a)$. 1p

$X^5(a)=X(a^5+5a^4+10a^3+10a^2+5a)$. ..... 1p, $X^5(1)=X(31)=\begin{pmatrix}63 & 31\\ -62 & -30\end{pmatrix}$. 1p

Subiectul IV Fie a,b,c,d$\in R$. Aflati $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încât $A^2 = O_2$.

Soluție $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc=0 \end{cases}$. 2p

Daca $a+d \neq 0 \Rightarrow b=c=0 \Rightarrow a=d=0 \Rightarrow a+d=0$ absurd. 2p

Deci a+d=0 $\Rightarrow \begin{cases} d=-a \\ bc=-a^2 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ cu proprietatea $bc=-a^2$ 3p