CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a IX-a

filiera teoretică: profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de corectare și notare

Subiectul I

Fie $n \in N^*, n$ dat, $a, b \in (0, +\infty)$ astfel încât $ab = 1$. Demonstrați că: $\frac{a^n}{b+1} + \frac{b^n}{a+1} \geq 1$.

Soluție

$b = \frac{1}{a}; \frac{a^n}{\frac{1}{a}+1} + \frac{\frac{1}{a^n}}{a+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{a^{n+1}}{a+1} + \frac{1}{a^n \cdot (a+1)} \geq 1$ 2p

$\frac{a^{2n+1}+1}{a^n(a+1)} \geq 1 \Leftrightarrow a^{2n+1} + 1 \geq a^{n+1} + a^n$ 1p

$(a^n - 1)(a^{n+1} - 1) \geq 0$ 2p

$(a-1)^2 (a^{n-1} + ... + 1)(a^n + a^{n-1} + ... + 1) \geq 0$ 2p

Subiectul II

a) Demonstrați că: $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}, \forall k \geq 2, k \in N$

b) Calculați: $\left[\sum_{k=1}^{2014} \frac{1}{k^2}\right]$, unde prin $[x]$ se definește partea întreagă a numărului real x.

Soluție

a) Demonstrarea inegalităților....................2p

b) k ia succesiv valorile 1,2,....2014 și se însumează....................2p

Se obține $1 < \sum_{k=1}^{2014} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{2014} < 2$ 2p

Finalizare....................1p

Subiectul III

Se consideră șirurile definite prin: $a_n = 3n + 1$ și $b_n = 3^{a_n}$

a) Demonstrați că: $a_{n+3} + a_2 = a_{n-3} + a_8$, $n \in N, n > 3$ și că $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_2 \cdot b_{2n-2}$, $n > 1$.

b) Determinați $k \in N^*$ astfel încât $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k+1} = 7854$.

c) Calculați $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $n \in N$.

Soluție

a) Se verifică prin calcule...2p

b) $(a_n)_n$ este progresie aritmetică de rație 3,

iar $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k+1}$ progresie aritmetică de rație 6.. ...1p

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{2k+1} = \frac{8+6k}{2}(k+1)$$ 1p

$\Rightarrow (4+3k)(k+1) = 7854, \quad k = 50$...1p

c) $3^{a_1} + 3^{a_2} + \dots + 3^{a_n} = 3^4 + 3^7 + \dots + 3^{3n+1} = 3^4 \cdot \frac{(3^3)^n - 1}{26} = \frac{81\cdot(27^n - 1)}{26}$..............2p

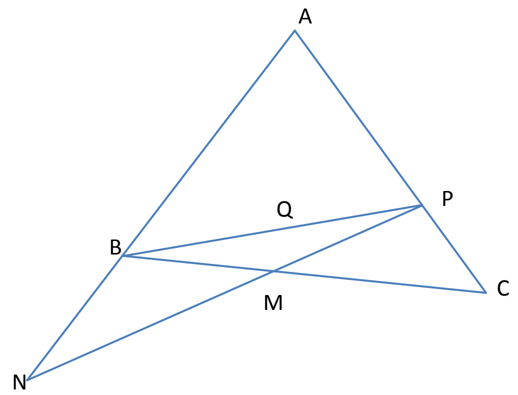
Subiectul IV

Fie ABC un triunghi, puncte M,N,P astfel încât $\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{NB}$.

a) Demonstrați că M,N,P sunt coliniare.

b) Arătați că $\overrightarrow{QM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{30}\overrightarrow{AC}$, unde Q este mijlocul lui $[BP]$.

Soluție



a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.............................1p

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{9}{10}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$$ 2p

$\Rightarrow \overrightarrow{PN} = \frac{9}{5}\overrightarrow{MN} \Rightarrow P - M - N$...1p

b) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$ 1p

$$\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MP}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{15}\overrightarrow{AC}\right)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{QM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{30}\overrightarrow{AC}$...2p