CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a IX-a

filiera teoretică: profil umanist, toate specializările

Barem de corectare şi notare

Subiectul I

Fie șirul de numere reale $a_n = \frac{2}{5}n + \frac{3}{5}$

a) Să se verifice dacă 45 este termen al șirului

b) Să se demonstreze că termenii șirului $(a_n)_{n\in N^*}$ formează o progresie aritmetică.

c) Să se calculeze $\text{card } N \cap \{a_{17}, a_{18}, ..., a_{110}\}$

Soluție

a) $\frac{2}{5}n + \frac{3}{5} = 45 \Rightarrow n = 111$ 2p

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{5}(n+1) + \frac{3}{5} - \frac{2}{5}n - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$, $r = \frac{2}{5}$ 2p

c) $a_n \in N \Rightarrow \frac{2}{5}n + \frac{3}{5} = k, k \in N$, $\frac{2n+3}{5} = k \Rightarrow n - 1 \vdots 5 \Rightarrow n = 5p + 1, p \in N$........2p

$card\ N \cap \{a_{17}, a_{18}, ..., a_{110}\} = 18$....................1p

Subiectul II

Ioana și Andreea sunt colege de clasă. Ioana afirmă că în clasa lor sunt mai mult de 30 de elevi, iar Andreea că sunt mai mult de 31 de elevi. Știind că una dintre ele minte, câți elevi sunt în clasă?

Soluție

. Dacă Ioana minte ar însemna că sunt mai puțin de 30 de elevi și atunci mint amândouă...3p

Dacă Andreea minte, atunci sunt cel mult 31 elevi, dar mai mulți decât 30, ...3p

deci sunt 31....................1p

Subiectul III

Să se determine mulţimea:

$$M = \left\{ (x, y) \in N \times N \,\middle|\, \frac{x+2}{y} \in N, \frac{y+3}{x} \in N \right\}$$

Soluţie

Pentru că $\frac{x+2}{y} \in N$ şi $\frac{y+3}{x} \in N$, rezultă că $x + 2 \geq y$ şi $y + 3 \geq x$ 2p

Se găseşte că $y \in \{x-3, x-2, x-1, x, x+1, x+2\}$ 2p

Se studiază fiecare caz şi se determină $M = \{(1,1), (1,3), (2,1), (4,1), (5,7), (8,5)\}$....................3p

Subiectul IV

Fie ABC un triunghi şi I centrul cercului înscris în triunghi. Dacă $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}$ oricare ar fi M un punct din planul triunghiului, atunci ΔABC este echilateral.

Soluţie

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, $\forall\ M$ un punct din planul ΔABC, iar G este centrul de greutate al $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MI}$ (1)....................2p

În $\Delta MAG : \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}$, iar în $\Delta : MAI : \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI}$

Din (1) $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI}$ 2p

Deci, mediana din varful A este şi bisectoare $\Rightarrow AB = AC$ 1p

Analog, $AC = BC$ şi deci ΔABC este echilateral....................2p