CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanţa, 23.02.2014

Clasa a IX-a

filiera tehnologică : profil tehnic, toate specializările

filiera tehnologică: profil servicii, specializarea resurse naturale şi protecţia mediului

Barem de corectare şi notare

Subiectul I

Rezolvaţi ecuaţia: $|5x+10|-|2x+3|-|x+4|=|4x+6|$.

Soluție

Ecuaţia se poate scrie sub forma : $|5x+10|-|4x+6|-|x+4|=|2x+3|$ 1p

$|5x+10|\le|4x+6|+|x+4|$ 2p

$|5x+10|-|4x+6|-|x+4|\le 0$ 2p

$|2x+3|\le 0$ 1p

Finalizare $x=-\dfrac{3}{2}$ 1p

Subiectul II

a) Calculaţi $\left(n+\dfrac{1}{10}\right)^2$.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $n^2+1\le\left(n+\dfrac{1}{10}\right)^2$.

c) Arătaţi că $\sqrt{n^2+1}<n+\dfrac{1}{10}$ oricare ar fi numărul natural n, $n\ge 5$.

d) Determinați prima zecimală a lui $\sqrt{2014^2+1}$.

Soluție

a) $\left(n+\dfrac{1}{10}\right)^2=n^2+\dfrac{n}{5}+\dfrac{1}{100}$ 1p

b) $n^2+1\le\left(n+\dfrac{1}{10}\right)^2 \Leftrightarrow n\ge\dfrac{99}{20}\Rightarrow n\ge 5\Rightarrow n=5$ 2p

c) $\sqrt{n^2+1}<n+\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow n^2+1<\left(n+\dfrac{1}{10}\right)^2$, adevărat pentru orice $n\ge 5$ 2p

d) $2014\le\sqrt{2014^2+1}<2014+\dfrac{1}{10}\Rightarrow$ prima zecimală este 0. ....2p

Subiectul III

Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$, $n\in\mathbf{N}$.

a) Demonstraţi că $\dfrac{1}{a_1\cdot a_2}+\dfrac{1}{a_2\cdot a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_{n-1}\cdot a_n}=\dfrac{n-1}{a_1\cdot a_n}$, oricare ar fi $n\ge 2, n\in\mathbf{N}$.

b) Să se calculeze suma primilor 2014 termeni ai progresiei aritmetice ştiind că $a_1+a_4+a_7+\ldots+a_{2011}+a_{2014}=1680$.

Soluție a) Inducție matematică.

Verificare pentru $n=2$ 1p

Etapa de demonstrare $P(k)\to P(k+1)$ şi finalizare 3p

b) Argumentarea faptului că suma are 672 termeni 1p

Deducerea relaţiei $(a_1+a_{2014})=5$ 1p

Finalizare $S_{2014}=5035$ 1p

Subiectul IV

Fie pătratele $ABCD$ şi $MNPQ$ având acelaşi centru O astfel încât sunt îndeplinite simultan condiţiile: $AB \parallel MP$, $Q \in (BE)$ unde punctul E verifică relaţia $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ} = \vec{0}$.

b) Arătaţi că $\overrightarrow{MQ} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$.

Soluție

a) Realizarea figurii 1p

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OQ}$ 1p

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ} = \vec{0}$ 1p

b)Demonstrarea paralelismului $OQ \parallel BC$ 1p

Din asemănarea triunghiurilor ΔEOQ şi $\Delta ECB \Rightarrow \overrightarrow{QO} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$ 2p

Finalizare $\overrightarrow{MQ} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$..1p

*Orice soluţie corectă diferită de cea din barem primeşte punctajul maxim.