Concursul naţional de matematică *Laurenţiu Duican*, Ed. a XVIII-a, Braşov 2014

Clasa a VII-a - Barem de corectare

VII 1. Orice număr din M este de forma $2^a 3^b 5^c 7^d$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

.... **1p**

Pentru $m_1 = 2^{a_1} 3^{b_1} 5^{c_1} 7^{d_1} \in M$ şi $m_2 = 2^{a_2} 3^{b_2} 5^{c_2} 7^{d_2} \in M$,
produsul $m_1 m_2 = 2^{a_1+a_2} 3^{b_1+b_2} 5^{c_1+c_2} 7^{d_1+d_2}$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) şi (d_1, d_2) sunt perechi de numere naturale de aceeaşi paritate.

.... **2p**

Unui cvadruplu de numere naturale (a, b, c, d) îi asociem cvadruplul (r_a, r_b, r_c, r_d), de componente 0 sau 1, al resturilor împărţirii numerelor a, b, c şi respectiv d la 2 (deci $r_k = 0$ pentru k par şi $r_k = 1$ pentru k impar, $k \in \mathbb{N}$).
Numărul cvadruplelor având componentele 0 sau 1 este $2^4 = 16$.

.... **3p**

Conform *principiului lui Dirichlet* (al *cutiei*), printre 17 cvadruple de numere naturale, există două având acelaşi cvadruplu al resturilor împărţirii la 2.
Rezultă că numarul minim n cu proprietatea din enunţ este 17.

.... **1p**

Total 7 puncte

VII 2. Conform teoremei bisectoarei, este suficient să demonstrăm $\frac{PM}{PB} = \frac{AM}{AB}$.

.... **3p**

Avem

$$\begin{cases} m(\widehat{PBM}) = m(\widehat{ACM}) \\ m(\widehat{PMB}) = m(\widehat{MNC}) + m(\widehat{MCN}) = m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{MBA}) = m(\widehat{AMC}) \end{cases},$$

de unde $\triangle BMP \sim \triangle CMA$ (*U.U.*).

.... **2p**

Atunci $\frac{PM}{PB} = \frac{AM}{AC} = \frac{AM}{AB}$.

.... **2p**

Total 7 puncte

VII 3. Notăm cu d_a, d_b, d_c distanţele de la centrul de greutate G la laturile de lungimi a, b, c ale triunghiului ABC. Cum triunghiurile GBC, GCA si GAB au ariile egale, rezultă $ad_a = bd_b = cd_c = \frac{2S}{3}$, unde S este aria triunghiului ABC. Rezultă

$$d_a + d_b + d_c = 2S \cdot \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3}.$$

.... **2p**

Cum $r = \frac{2S}{a+b+c}$, avem

$$3r = 2S \cdot \frac{3}{a+b+c}.$$

.... **2p**

Pe baza inegalităţii dintre media aritmetică şi media armonică, obţinem

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{a+b+c}.$$

.... **2p**

Ca urmare, $d_a + d_b + d_c \geq 3r$.

.... **1p**

Total 7 puncte

VII 4. Considerăm $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_{2014}$ o scriere arbitrară a numerelor $1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 2014$. Avem $|a_k - k| \in \{0, 1, \cdots, 2013\}$, pentru orice $k \in \{1, 2, \cdots, 2014\}$.

.... **1p**

Presupunem, prin absurd, că numerele $|a_k - k|,\ k \in \{1, 2, \cdots, 2014\}$, sunt distincte.
Atunci $\{|a_k - k|,\ k = 1, 2, \cdots, 2014\} = \{0, 1, 2, \cdots, 2013\}$,
deci $S := |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + ... + |a_{2014} - 2014| = 0 + 1 + 2 + \cdots + 2013 = 2013 \cdot 1007$.
Suma S este un număr impar.

.... **3p**

Dacă x este un număr întreg, atunci $|x|$ are aceeaşi paritate cu x.
Rezultă că S are aceeaşi paritate cu numărul $(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + ... + (a_{2014} - 2014) = 0$.
Deci S este un număr par.

.... **2p**

Contradicţie.
Deducem că printre $|a_1 - 1|,\ |a_2 - 2|,\ ..., |a_{2014} - 2014|$ există două numere egale.

.... **1p**

Total 7 puncte

Concursul naţional de matematică *Laurenţiu Duican*, Ed. a XVIII-a, Braşov 2014

Clasa a VIII-a - Barem de corectare

VIII 1. $x^4 < 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \leq (x+1)^4$.

.... **2p**

Obţinem $y = x + 1$.

.... **2p**

Ecuaţia devine $3x^3 + 5x^2 + 3x = 0$.

.... **1p**

Rezultă $x = 0$ şi $y = 1$.

.... **2p**

Total 7 puncte

VIII 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $[\sqrt{n}] = a \in \mathbb{N}^*$.
Avem $a \leq \sqrt{n} < a + 1$, de unde $n \in \{a^2,\ a^2+1,\ a^2+2,\ \cdots,\ a^2+2a-1,\ a^2+2a\}$.

.... **1p**

Distingem două cazuri.
Cazul I. $n \in \left\{a^2, a^2+1, ..., a^2+2a-1\right\}$. Avem $[\sqrt{n}] = \left[\sqrt{n+1}\right] = a$.

.... **1p**

Dacă numerele $\frac{n+2014}{[\sqrt{n}]} = \frac{n+2014}{a}$ şi $\frac{n+2013}{[\sqrt{n+1}]} = \frac{n+2013}{a}$ sunt naturale, atunci $\frac{1}{a}$ este un număr natural, deci $a = 1$. Obţinem $n = 1$ sau $n = 2$.

.... **2p**

Cazul II. $n = a^2 + 2a$. Atunci $[\sqrt{n}] = a$ şi $\left[\sqrt{n+1}\right] = a + 1$.

.... **1p**

Dacă numerele $\frac{n+2014}{[\sqrt{n}]} = \frac{a^2+2a+2014}{a} = a + 2 + \frac{2014}{a}$ şi $\frac{n+2013}{[\sqrt{n+1}]} = \frac{a^2+2a+2013}{a+1} = a + 1 + \frac{2012}{a+1}$ sunt naturale, atunci $a|2014$ şi $(a+1)|2012$. Obţinem $a = 1$, de unde $n = 3$.
În concluzie, $n \in \{1, 2, 3\}$.

.... **2p**

Total 7 puncte

VIII 3.
Un punct M aparţine sferei de diametru $[VA_k]$ dacă şi numai dacă $m\left(\widehat{VMA_k}\right) = 90°$.

.... **1p**

a) Presupunem că sferele de diametre $[VA_1]$, $[VA_2]$, $\cdots$, $[VA_n]$ au un al doilea punct comun O. Atunci $m\left(\widehat{VOA_k}\right) = 90°$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Rezultă că punctele $A_1, A_2, ...A_n$ se află în planul perpendicular în punctul O pe dreapta VO.

.... **2p**

Reciproc, presupunem că punctele $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sunt situate într-un plan α. Conform ipotezei, $V \notin \alpha$. Notăm cu O proiecţia lui V pe planul α. Deducem că sferele de diametre $[VA_k]$, $k = 1, 2, \cdots, n$, au în comun punctele distincte V şi O.

.... **2p**

b) Conform rezultatului de la a), oricare n puncte din cele $n + 1$ ale mulţimii considerate sunt coplanare.

.... **1p**

Se deduce $n = 3$.

.... **1p**

Total 7 puncte

VIII 4. Fie n un număr natural cu proprietăţile din enunţ.
Deoarece pătratele de o cifră nu sunt prime, numărul n are cel puţin 2 cifre. Cum produsul cifrelor lui n este un număr prim, n are o cifră un număr prim din mulţimea $\{2, 3, 5, 7\}$, iar restul cifrelor egale cu 1.

.... **1p**

Ultima cifră a unui pătrat nu poate fi $2, 3$ sau 7.

.... **1p**

Dacă ultima cifră ar fi 5, atunci penultima ar fi 1, deci numărul ar fi multiplu de 5, dar nu ar fi multiplu de 25 şi prin urmare nu ar fi un pătrat perfect. Deci ultima cifră a numărului este 1.

.... **1p**

Dacă numărul format din ultimele două cifre ale lui n ar fi $11, 31, 51$ sau 71, atunci n ar fi de forma $4k + 3$, deci nu ar fi pătrat perfect. Deducem că numărul format din ultimele trei cifre ale lui n este 121.

.... **1p**

Numărul $n = 121 = 11^2$ satisface proprietăţile din enunţ.

.... **1p**

Numărul 1121 nu este pătrat perfect. Să presupunem (prin absurd) că ar exista $k \geq 3$ astfel încât $n = \overline{\underbrace{11...1}_{k}21}$ să fie pătratul unui număr natural a. Analizând ultimele cifre posibile ale lui a, deducem că $a = \overline{\cdots 011}$ sau $a = \overline{\cdots 25511}$. Dar oricare ar fi cifra miilor lui a în primul caz, respectiv cifra sutelor de mii a lui a în cel de al doilea caz, nu putem avea $a^2 = n$ (deoarece a^2 conţine cel puţin 2 cifre pare).

.... **2p**

Total 7 puncte

Concursul naţional de matematică *Laurenţiu Duican*, Ed. a XVIII-a, Braşov 2014

Clasa a IX-a - Barem de corectare

IX 1. Proprietatea este clară pentru submulţimile cu un element.
Fie o submulţime arbitrară de $k \geq 2$ ($k \leq n+1$) vectori

$$\{\vec{v}_{i_1}, \vec{v}_{i_2}, \cdots, \vec{v}_{i_k}\}, \text{ cu } 0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n.$$

Presupunem prin reducere la absurd că

$$\sum_{j=1}^{k} \vec{v}_{i_j} = \vec{0}, \text{ de unde } \vec{v}_{i_k} = -\sum_{j=1}^{k-1} \vec{v}_{i_j}.$$

.... **2p**

Atunci

$$2^{i_k} = |\vec{v}_{i_k}| = \left| \sum_{j=1}^{k-1} \vec{v}_{i_j} \right| \leq \sum_{j=1}^{k-1} |\vec{v}_{i_j}| = \sum_{j=1}^{k-1} 2^{i_j}.$$

.... **2p**

Dar $\sum\limits_{j=1}^{k-1} 2^{i_j} \leq \sum\limits_{p=0}^{i_k-1} 2^p = 2^{i_k} - 1 < 2^{i_k}$. Contradicţie. Deci

$$\sum_{j=1}^{k} \vec{v}_{i_j} \neq \vec{0}.$$

.... **3p**

Total 7 puncte

IX 2. Fie $a \in A$. Există $b, c \in A \setminus \{a\}$, $b \neq c$.

$$\left.\begin{array}{c} c^3 + a \in \mathbb{Q} \\ c^3 + b \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Q}.$$

.... **2p**

$$\left.\begin{array}{c} a^3 + c \in \mathbb{Q} \\ b^3 + c \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow a^3 - b^3 \in \mathbb{Q}.$$

.... **1p**

$$\left.\begin{array}{c} a - b \in \mathbb{Q} \\ a^3 - b^3 \in \mathbb{Q} \\ a \neq b \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + ab + b^2 \in \mathbb{Q}.$$

$$\left.\begin{array}{c} (a-b)^2 \in \mathbb{Q} \\ a^2 + ab + b^2 \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a^2 + b^2 \in \mathbb{Q} \\ ab \in \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 - ab + b^2 \in \mathbb{Q}.$$

.... **1p**

$$\left.\begin{array}{l} a^3+b\in\mathbb{Q} \\ b^3+a\in\mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow\ (a+b)(a^2-ab+b^2+1)\in\mathbb{Q}.$$

$$\left.\begin{array}{c} (a+b)(a^2-ab+b^2+1)\in\mathbb{Q} \\ a^2-ab+b^2\in\mathbb{Q} \\ a^2-ab+b^2+1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ a+b\in\mathbb{Q}.$$

.... **2p**

$$\left.\begin{array}{l} a-b\in\mathbb{Q} \\ a+b\in\mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow\ a\in\mathbb{Q}.$$

Dar $a \in A$ este arbitrar. Rezultă $A \subset \mathbb{Q}$.

.... **1p**

Total 7 puncte

IX 3. Pentru $\alpha \leq 0$ avem $\alpha < x,\ \forall\, x \in A$, deci $A \subset [\alpha, \infty)$.
Pentru $\alpha > 0$, notăm $n_\alpha = [2/\alpha] + 1 \in \mathbb{N}^*$. Avem

$$\frac{4n_\alpha}{1+2n_\alpha^2} \in A \text{ şi } \frac{4n_\alpha}{1+2n_\alpha^2} < \frac{2}{n_\alpha} < \alpha.$$

Rezultă $a = 0$.

.... **2 p**

Din inegalitatea $2mn\sqrt{2} \leq m^2 + 2n^2$ rezultă

$$\frac{4mn}{m^2+2n^2} \leq \sqrt{2},\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*.$$

.... **1p**

Pentru $\beta \geq \sqrt{2}$, avem $x \leq \beta,\ \forall\, x \in A$, deci $A \subset (-\infty, \beta]$.
Pentru $0 < \beta < \sqrt{2}$, arătăm că există $n_\beta, m_\beta \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $4m_\beta n_\beta / \left(m_\beta^2 + 2n_\beta^2\right) > \beta$, sau

$$\beta m_\beta^2 - 4n_\beta m_\beta + 2\beta n_\beta^2 < 0. \quad (1)$$

.... **2p**

Deoarece $\beta > 0$ şi $2 - \beta^2 > 0$, relaţia (1) este echivalentă cu $m_\beta \in (n_\beta\beta_1, n_\beta\beta_2)$, unde

$$\beta_1 = \frac{2-\sqrt{2(2-\beta^2)}}{\beta},\ \beta_2 = \frac{2+\sqrt{2(2-\beta^2)}}{\beta},\ \text{ cu } \beta_1, \beta_2 \in (0, \infty).$$

Există $n_\beta \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n_\beta(\beta_2 - \beta_1) > 1$ (de exemplu, alegem $n_\beta = [(\beta_2 - \beta_1)^{-1}] + 1$).
Cum intervalul $(n_\beta\beta_1, n_\beta\beta_2)$ are lungimea mai mare decât 1, există $m_\beta \in (n_\beta\beta_1, n_\beta\beta_2) \cap \mathbb{N}^*$ (de exemplu, alegem $m_\beta = [n_\beta\beta_1] + 1$).
Rezultă $b = \sqrt{2}$.

.... **2p**

Total 7 puncte

IX 4. Deoarece $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{NC}$, relaţia din enunţ devine

$$\operatorname{tg} A\cdot \overrightarrow{NA} + \operatorname{tg} B\cdot \overrightarrow{NB} + \operatorname{tg} C\cdot \overrightarrow{NC} = \vec{0}. \quad (1)$$

.... **2p**

Punctul N este unic determinat de relaţia (1). Astfel, dacă P este un punct din plan care satisface relaţia $\sum \operatorname{tg} A\cdot \overrightarrow{PA}=\vec{0}$, atunci $\vec{0}=\sum \operatorname{tg} A\left(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{PA}\right)=(\sum \operatorname{tg} A)\cdot \overrightarrow{NP}$, de unde $P=N$.

.... **1p**

Arătăm că $\sum \operatorname{tg} A\cdot \overrightarrow{HA}=\vec{0}$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.
Fie $A_1 \in BC$ piciorul înălţimii din A. Avem $\overrightarrow{BA_1}=\operatorname{tg} B/\operatorname{tg} C\cdot \overrightarrow{A_1C}$, de unde

$$\overrightarrow{HA_1}=\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}\,\overrightarrow{HB}+\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}\,\overrightarrow{HC}=\frac{\cos B\cos C}{\sin A}\left(\operatorname{tg} B\cdot \overrightarrow{HB}+\operatorname{tg} C\cdot \overrightarrow{HC}\right).$$

Apoi

$$\overrightarrow{HA_1}=-\frac{\cos B\cos C}{\cos A}\,\overrightarrow{HA}.$$

Obţinem $\sum \operatorname{tg} A\cdot \overrightarrow{HA}=\vec{0}$, deci $N=H$.

.... **4p**

Total 7 puncte

Concursul naţional de matematică *Laurenţiu Duican*, Ed. a XVIII-a, Braşov 2014

Clasa a X-a - Barem de corectare

X 1. Fie $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = 1$ şi $a, b \in \mathbb{N}^*$.

$$\left|z^{2a+b}+1\right| + |z^a+1| \geq \left|z^{2a+b}+1-z^a-1\right| = |z^a| \cdot \left|z^{a+b}-1\right| = \left|z^{a+b}-1\right|.$$

.... **5p**

Rezultă

$$\left|z^{a+b}+1\right| + \left|z^{2a+b}+1\right| + |z^a+1| \geq \left|z^{a+b}+1\right| + \left|z^{a+b}-1\right| \geq \left|z^{a+b}+1-z^{a+b}+1\right| = 2.$$

.... **2p**

Total 7 puncte

X 2. Fie $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$, cu $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a$.

1) Dacă $x_k \in [0,1]$, $\forall\ k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ (cu $a < n$), atunci $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{x_k} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a \geq \sqrt[n]{a}$.

.... **2p**

2) Dacă $x_k > 1$, $\forall\ k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ (cu $a > n$), atunci $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{x_k} > \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[n]{x_k}$.

Prin inductie (utilizând formula binomului lui Newton), obţinem $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[n]{x_k} > \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}$.

Rezultă $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{x_k} > \sqrt[n]{a}$.

.... **2p**

3) Dacă $A := \{k \in \{1, 2, \cdots, n\} |\ x_k \leq 1\} \neq \emptyset$ şi $B := \{k \in \{1, 2, \cdots, n\} |\ x_k > 1\} \neq \emptyset$, atunci, notând $x = \sum\limits_{k \in A} x_k$, avem

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{x_k} \geq \sum_{k \in A} x_k + \sum_{k \in B} \sqrt[n]{x_k} \geq \sum_{k \in A} x_k + \sqrt[n]{\sum_{k \in B} x_k} = x + \sqrt[n]{a-x}.$$

Pentru $b \geq 1$ şi $c \in [0, b]$, avem $b^n - c^n + c - b = (b-c)(b^{n-1} + b^{n-2}c + \cdots + c^{n-1} - 1) \geq 0$, deci $b^n - c^n + c \geq b$.
Alegând $b = \sqrt[n]{a} \geq 1$ şi $c = \sqrt[n]{a-x} \in (0, b]$, obţinem $x + \sqrt[n]{a-x} \geq \sqrt[n]{a}$.
Rezultă $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{x_k} \geq \sqrt[n]{a}$.

.... **3p**

Total 7 puncte

X 3.
(1) $\Rightarrow$ (2). Fie f cu proprietăţile (i) şi (ii). Atunci funcţia $t:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $t(x)=g(\log_a x)-h(\log_b x)=\log_b x-\log_a x$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

.... **2p**

Deoarece $a,b>1$, avem $t(1)<t(a)$, sau $0<\log_b a-1$, de unde $a>b$.

.... **2p**

(2) $\Rightarrow$ (1). Presupunem $a>b$. Fie $c\in(b,a)$. Definim $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_c x,\ x>0$. Obţinem $g(x)=(\log_c a-1)\,x$ şi $h(x)=(\log_c b-1)\,x,\ x\in\mathbb{R}$. Cum $\log_c a-1>0$ şi $\log_c b-1<0$, rezultă că g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, iar h este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

.... **3p**

Total 7 puncte

X 4. Se utilizează identităţile $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$ şi $(n+1)C_n^{k-1}=kC_{n+1}^k,\ 1\le k\le n$.

.... **1p**

Fie $f_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^{-1}C_n^k,\ n\in\mathbb{N}^*$. Avem $f_1=1$ şi

$$f_{n+1}-f_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{n+1}^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^{k-1}+\frac{(-1)^n}{n+1}C_{n+1}^{n+1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}C_{n+1}^k=\frac{1}{n+1}\left[1-(1-1)^{n+1}\right]=\frac{1}{n+1},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

Se obţine identitatea (cunoscută):

$$f_n=C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2+\frac{1}{3}C_n^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}C_n^n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

.... **2p**

Fie $g_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^{-2}C_n^k,\ n\in\mathbb{N}^*$. Avem $g_1=1$ şi

$$g_{n+1}-g_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}C_{n+1}^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}C_n^k=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}C_n^{k-1}+\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}C_{n+1}^{n+1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_{n+1}^k=\frac{1}{n+1}f_{n+1},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

.... **3p**

Rezultă

$$g_n=C_n^1-\frac{1}{2^2}C_n^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}C_n^n=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),\ n\in\mathbb{N}^*.$$

.... **1p**

Total 7 puncte

Clasa a XI-a - Barem de corectare

XI 1. Fie $r : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$r(x) = \frac{\frac{\frac{f(x)}{x} - 3}{x} - 2}{x}, \ x > 0.$$

Avem $f(x) = 3x + 2x^2 + x^3 r(x), \ x > 0$, cu $\lim\limits_{x \searrow 0} r(x) = 1$.

.... **3p**

Obţinem $f(3x) - f(2x) = 3x + 10x^2 + x^3[27r(3x) - 8r(2x)], \ x > 0$.

.... **3p**

Atunci

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{\frac{f(3x)-f(2x)}{x} - 3}{x} - 10}{x} = \lim_{x \searrow 0} [27r(3x) - 8r(2x)] = 19.$$

.... **1p**

Total 7 puncte

XI 2.
a) $2\cos(2^{-1}x) = \sqrt{2 + 2\cos x}, \ x \in [-\pi, \pi]$.

Demonstraţia prin inducţie a relaţiei $2\cos\left(2^{-(k+1)}\pi\right) = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2}}}}_{k \ radicali}, \ k \in \mathbb{N}^*$.

.... **2p**

b)

$$\sin\frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\cos\left(2^{-k}\pi\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \cdots \sqrt{2}}}_{k-1 \ radicali}}, \ k \in \mathbb{N}^*.$$

.... **1p**

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}, \ n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\frac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x, \ x \in (0, \pi/2) \ \Rightarrow \ S_n = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2^{n+2}} - 1\right), \ n \in \mathbb{N}^*.$$

.... **2p**

$$\operatorname{tg} x > x, \ \forall \ x \in (0, \pi/2) \ \Rightarrow \ \frac{S_n}{2^n} < \frac{2}{\pi}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1 \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{2^n} = \frac{2}{\pi}.$$

În concluzie, $\sup A = 2/\pi$.

.... **2p**

Total 7 puncte

XI 3. Notăm $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = AB - BA$.
Conform ipotezei şi proprietăţii $(XY)^T = Y^T X^T,\ \forall\ X,Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{Tr}(CC^T) = \operatorname{Tr}[(AB - BA)(BA - AB)] =$$
$$= \operatorname{Tr}(AB^2A) + \operatorname{Tr}(BA^2B) - \operatorname{Tr}(AB)^2 - \operatorname{Tr}(BA)^2.$$

.... **2p**

Aplicând relaţia $\operatorname{Tr}(XY) = \operatorname{Tr}(YX),\ \forall\ X,Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, obţinem:

$$\operatorname{Tr}(AB^2A) = \operatorname{Tr}(A^2B^2) = \operatorname{Tr}(BA^2B) \text{ şi } \operatorname{Tr}(BA)^2 = \operatorname{Tr}(AB)^2.$$

Rezultă $\operatorname{Tr}(CC^T) = 2[\operatorname{Tr}(A^2B^2) - \operatorname{Tr}(AB)^2] = 0$

.... **3p**

Dar $\operatorname{Tr}(CC^T) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}^2$. Rezultă $C = O_n$, deci $AB = BA$.

.... **2p**

Total 7 puncte

XI 4. Aplicând regula lui l'Hospital, obţinem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2\ln(x+1) - x^2\ln x}{x\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x+1)\ln(x+1) + (x+1) - 2x\ln x - x}{1+\ln x} =$$
$$= 2\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x^{-1}} = 2\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2.$$

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2\ln(n+1) - n^2\ln n}{n\ln n} = 2.$$

.... **2p**

$$\frac{(n+1)^\alpha\ln^\beta(n+1) - n^\alpha\ln^\beta n}{n\ln n} = \frac{(n+1)^2\ln(n+1) - n^2\ln n}{n\ln n} \cdot \frac{(n+1)^\alpha\ln^\beta(n+1) - n^\alpha\ln^\beta n}{(n+1)^2\ln(n+1) - n^2\ln n}.$$

.... **1p**

Fie $f,g : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^\alpha\ln^\beta x,\ g(x) = x^2\ln x$. Aplicam funcţiilor f şi g teorema lui Cauchy pe intervalul $[n, n+1]$: există $c_n \in (n, n+1)$ astfel ca

$$\frac{(n+1)^\alpha\ln^\beta(n+1) - n^\alpha\ln^\beta n}{(n+1)^2\ln(n+1) - n^2\ln n} = \frac{f(n+1) - f(n)}{g(n+1) - g(n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \left(c_n^{\alpha-2}\ln^{\beta-1}c_n\right)\frac{\beta + \alpha\ln c_n}{1+2\ln c_n}.$$

.... **2p**

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^{\alpha-2}\ln^{\beta-1}x\right)\frac{\beta+\alpha\ln x}{1+2\ln x}\right] = \begin{cases} 1, & \alpha = 2,\ \beta = 1; \\ 0, & \alpha < 2,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ sau } \alpha = 2,\ \beta < 1; \\ \infty, & \alpha > 2, \beta \in \mathbb{R} \text{ sau } \alpha = 2,\ \beta > 1. \end{cases}$$

$c_n > n\ (\forall\ n \in \mathbb{N}^*)\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.
Rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha\ln^\beta(n+1) - n^\alpha\ln^\beta n}{n\ln n} = \begin{cases} 2, & \alpha = 2,\ \beta = 1; \\ 0, & \alpha < 2,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ sau } \alpha = 2,\ \beta < 1; \\ \infty, & \alpha > 2, \beta \in \mathbb{R} \text{ sau } \alpha = 2,\ \beta > 1. \end{cases}$$

.... **2p**

Total 7 puncte

Concursul naţional de matematică *Laurenţiu Duican*, Ed. a XVIII-a, Braşov 2014

Clasa a XII-a - Barem de corectare

XII 1.

$$f \text{ morfism } \Rightarrow x^{n+1}y^{n+1} = (xy)^{n+1},\ \forall\, x, y \in G \Rightarrow x^n y^n = (yx)^n,\ \forall\, x, y \in G. \qquad (1)$$

.... **1p**

$$(1) \Rightarrow x^n y^{n+1} x = (yx)^{n+1},\ \forall\, x, y \in G. \qquad (2)$$

.... **1p**

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ morfism} \\ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow x^n y^{n+1} x = y^{n+1} x^{n+1},\ \forall\, x, y \in G. \qquad (3)$$

$$(3) \Rightarrow x^n y^{n+1} = y^{n+1} x^n,\ \forall\, x, y \in G. \qquad (4)$$

.... **1p**

$$(4) \Rightarrow x^n y^{n+1} x^{-n} = y^{n+1},\ \forall\, x, y \in G. \qquad (5)$$

.... **1p**

$$(5) \Rightarrow (x^n y x^{-n})^{n+1} = y^{n+1},\ \forall\, x, y \in G. \qquad (6)$$

$$(6) \Rightarrow x^n y x^{-n} = y, \forall\, x, y \in G. \qquad (7)$$

.... **1p**

$$(7) \Rightarrow x^n = y x^n y^{-1},\ \forall\, x, y \in G. \qquad (8)$$

$$(8) \Rightarrow x^n y = y x^n,\ \forall\, x, y \in G. \qquad (9)$$

.... **1p**

Fie $a, b \in G$. Funcţia g este surjectivă, deci există $c \in G$ astfel ca $b = c^n$.
(9) $\Rightarrow$ $c^n a = a c^n \Rightarrow ba = ab$.
Deci $(G, \cdot)$ este un grup abelian.

.... **1p**

Total 7 puncte

XII 2.

a) Exemplu.

$$A_k = \begin{bmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{bmatrix},\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

$H = \{A_1, \cdots, A_n\}$ este grup multiplicativ de ordinul n (izomorf cu grupul multiplicativ al rădăcinilor de ordinul n ale unităţii).

.... **1p**

Suma rădăcinilor de ordinul n ale unităţii este nulă, de unde

$$\sum_{k=1}^{n} Tr(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k\pi}{n} = 0.$$

.... **1p**

b) Notăm $S = \sum_{k=1}^{n} A_k$. Pentru orice $A_k \in H$ avem $H = \{A_kA_1, A_kA_2, \ldots, A_kA_n\}$.

.... **1p**

$A_kA_1 + A_kA_1 + \ldots + A_kA_n = S$, de unde $A_kS = S$.
Prin însumarea relaţiilor se obţine $S^2 = nS$.

.... **1p**

Rezultă că valorile proprii ale lui S, notate cu λ_1 şi λ_2, verifică ecuaţia $x^2 = nx$.

.... **1p**

Din condiţia $\sum_{k=1}^{n} Tr(A_k) = 0$ rezută $Tr(S) = 0$. Atunci $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Cum $\lambda_1, \lambda_2 \in \{0, n\}$, deducem $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

.... **1p**

Rezultă $\det(S) = \lambda_1\lambda_2 = 0$. Atunci $S^2 = O_2$, de unde obţinem $S = \frac{1}{n}S^2 = O_2$.

.... **1p**

Total 7 puncte

XII 3.
$x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$.

.... **3p**

$$\begin{aligned} I: &= \int \frac{(x^2-1)(x^8+3x^6+6x^4+3x^2+1)}{x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{6x^5-5x^4+4x^3-3x^2+2x-1}{x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1}dx - \int \frac{6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}dx\right)\end{aligned}$$

.... **3p**

$I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}\right|+C.$

.... **1p**

Total 7 puncte

XII 4. Demonstraţie prin reducere la absurd.
Presupunem că există $m>0$ şi un şir (a_k), $a_k>0$, astfel ca $a_k\to\infty$ şi $|f(a_k)|\geq m$, $\forall\ k\in\mathbb{N}$. Deoarece există o infinitate de indici k astfel ca $f(a_k)\geq m$ sau o infinitate de indici k astfel ca $f(a_k)\leq -m$, putem presupune, pentru simplificarea notaţiei, că avem $f(a_k)\geq m$, $\forall\ k\in\mathbb{N}$.

.... **1p**

Arătăm că există $\varepsilon_0>0$ astfel încât pentru orice $k\in\mathbb{N}$ putem alege $b_k>a_k$ cu proprietatea $\frac{1}{b_k}\int_{a_k}^{b_k}|f(x)|dx>\varepsilon_0$. Aceasta este o contradicţie, care va încheia demonstraţia.

.... **1p**

Fixăm $k\in\mathbb{N}$ şi notăm, pentru simplificare, $a:=a_k$ şi $b:=b_k$. Avem
$\frac{1}{b}\int\limits_0^b|f(x)|dx\geq\frac{1}{b}\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{1}{b}\int\limits_a^b\left[f(a)+\int_a^x f'(t)dt\right]dx=:T_1.$

.... **1p**

$T_1\geq\frac{1}{b}\int\limits_a^b\left[m-\int_a^x\frac{c}{t}dt\right]dx=:T_2.$

.... **1p**

$T_2=\frac{1}{b}\int\limits_a^b[m-c(\ln x-\ln a)]dx=\frac{b-a}{b}(m+c)-c\ln\frac{b}{a}=:T_3.$

.... **1p**

Folosind inegalitatea $\ln(1+x)\leq x$, $x>0$, obţinem $T_3\geq\frac{b-a}{b}(m+c)-c\frac{b-a}{a}=:T_4$.

.... **1p**

Dacă notăm $\psi(u)=(1-u)(m+c)-\frac{c}{u}+c$, $0<u\leq 1$, avem $T_4=\psi(\frac{a}{b})$.
Apoi, $\psi'(u)=-m-c+\frac{c}{u^2}$. Deoarece $\psi'(1)=-m<0$, putem alege $u_0<1$, astfel ca $\psi'(u)<0$ pentru orice $u\in(u_0,1]$. Deci $\psi(u_0)>\psi(1)=0$. Putem alege $\varepsilon_0=\psi(u_0)$ şi $b=\frac{a}{u_0}$.

.... **1p**

Total 7 puncte