



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a VII-a

Barem de corectare

Problema 1

a) Numerele 9 și 25 au exact trei divizori \Rightarrow 9 și 25 sunt “pătrate magice”

Numărul 10 are 4 divizori iar numărul 12 are 6 divizori \Rightarrow 10 și 12 nu sunt “pătrate magice” (2p)

b) Dacă un număr n are exact trei divizori atunci $n = p^2$, unde $p =$ număr prim. (1p)

“Pătratele magice” de trei cifre sunt $11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2 \Rightarrow$ 7 numere de trei cifre care sunt pătrate magice. (1p)

c) Presupunem că există 2 “pătrate magice” $a \leq b$ a căror sumă este un “pătrat magic” $c. \Rightarrow a \leq b < c.$

$$\Rightarrow a = p^2, b = q^2, c = r^2 \text{ unde } p, q, r \text{ sunt numere prime cu } p \leq q < r, \quad p^2 + q^2 = r^2 \quad (1p)$$

Presupunem că p este un număr impar, prim $\Rightarrow p \geq 3 \Rightarrow q \geq 3$ deci r -este numr par $\Rightarrow r = 2 \Rightarrow r < p.$

Contradicție. $\Rightarrow p = 2$ (1p)

Presupunem că $q \neq 3$. Cum q este număr prim înseamnă că nu este divizibil cu 3 deci q^2 este $M_3 + 1$, $\Rightarrow r^2 = 4 + q^2$ este $M_3 + 2$, dar un pătrat perfect nu poate fi $M_3 + 2$. Contradicție $\Rightarrow q = 3$.

$$\Rightarrow r^2 = 4 + 9 = 13. \text{ Contradicție. } (1p)$$

Problema 2

a)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}} \quad (2p)$$

b)

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{\sqrt{5^2 + 5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{6^2 + 6}} + \dots + \frac{\sqrt{2014} - \sqrt{2013}}{\sqrt{2013^2 + 2013}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2013}} - \frac{1}{\sqrt{2014}} = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2014}} \quad (2p) \end{aligned}$$



c)

$$\frac{1}{\sqrt{315}} = \frac{1}{3\sqrt{35}} = \quad (1p)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{35}} - \frac{1}{6\sqrt{35}} = \frac{1}{\sqrt{140}} - \frac{1}{\sqrt{1260}} = \frac{1}{\sqrt{140}} - \frac{1}{\sqrt{141}} + \frac{1}{\sqrt{141}} - \frac{1}{\sqrt{142}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1259}} - \frac{1}{\sqrt{1260}} =$$

$$= \frac{\sqrt{141} - \sqrt{140}}{\sqrt{140^2 + 140}} + \frac{\sqrt{142} - \sqrt{141}}{\sqrt{141^2 + 141}} + \dots + \frac{\sqrt{1260} - \sqrt{1259}}{\sqrt{1259^2 + 1259}}$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \frac{\sqrt{141} - \sqrt{140}}{\sqrt{140^2 + 140}}, \frac{\sqrt{142} - \sqrt{141}}{\sqrt{141^2 + 141}}, \dots, \frac{\sqrt{1260} - \sqrt{1259}}{\sqrt{1259^2 + 1259}} \right\} \quad (2p)$$

Problema 3

a) $m(\widehat{MCB}) + m(\widehat{MBC}) = \frac{m(\widehat{DCB})}{2} + \frac{m(\widehat{ABC})}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \Delta MBC$ este dreptunghic (2p)

b) Fie $MN \parallel AB$, $N \in (BC)$.

$$\Rightarrow \widehat{DCM} \equiv \widehat{NMC}, \text{ dar } \widehat{DCM} \equiv \widehat{NCM} \Rightarrow \widehat{NMC} \equiv \widehat{NCM}$$

$\Rightarrow \Delta MNC$ isoscel, deci $MN=NC$. Analog $MN=NB$, deci $CN=NB$.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel MN \parallel DC \\ CN = NB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Teorema paralelelor echidistante}} AM = MD \quad (2p)$$

c) Fie $DE \perp MC$, $E \in (MC)$, $DE \cap BC = \{F\}$, $AH \perp MB$, $H \in (MB)$. În ΔDCF , (CE) -înălțime și bisectoare $\Rightarrow \Delta DCF$ -isoscel $\Rightarrow (CE)$ – mediană $\Rightarrow E$ – mijlocul lui (DF) (1p)

$$\left. \begin{array}{l} (ME) \text{ – linie mijlocie în } \Delta DAF \Rightarrow ME \parallel AF \\ \text{Dar } ME \perp BM \end{array} \right\} \Rightarrow AF \perp MB \quad (1p)$$

$\Rightarrow F \in AH \Rightarrow DE, AH, BC$ – sunt concurente în F (1p)

Problema 4

Fie M și N mijloacele segmentelor (AB) și (AC) . (1p)

$$DE = \frac{2}{3} DM \quad (1), \quad DF = \frac{2}{3} DN$$

$$\frac{DE}{EM} = \frac{DF}{FN} = \frac{2}{1} \Rightarrow EF \parallel MN \Rightarrow \Delta DEF \sim \Delta DMN \Rightarrow \frac{DE}{DM} = \frac{EF}{MN} \Rightarrow EF = \frac{2}{3} MN = \frac{BC}{3} \quad (2) \quad (2p)$$

„ $\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow AD \perp BC$ ”



$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} DE = \frac{1}{3} AB \stackrel{(1)}{\Rightarrow} DM = \frac{1}{2} AB \stackrel{R.T.Med.}{\Rightarrow} \Delta ADB \text{ dr. în } D \Rightarrow AD \perp BC \text{ (2p)}$$

„ $\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow AD \perp BC$ ”

$$\text{Dacă } AD \perp BC \text{ atunci } \Delta ADB - \text{ dr. în } D \stackrel{T.med.}{\Rightarrow} DM = \frac{1}{2} AB \stackrel{(1)}{\Rightarrow} DE = \frac{1}{3} AB (3)$$

$$\text{Analog } DF = \frac{1}{3} AC (4)$$

$$\stackrel{(2)(3)(4)}{\Rightarrow} \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF \quad (2p)$$

Notă: a) Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte.
b) Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.