

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014
Clasa a IX-a
VARIANTA 2
BAREM DE CORECTARE:
Problema 1

 Fie a, b, c numere reale strict positive. Arătați că:

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ac} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

GM nr.11/2013
Soluție:

Aplicând inegalitatea mediilor avem:

$$\begin{aligned} a^2 + bc &\geq 2\sqrt{a^2bc} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2\sqrt{a^2bc}} \Leftrightarrow \frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}} \\ b^2 + ac &\geq 2\sqrt{b^2ac} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2+ac} \leq \frac{1}{2\sqrt{b^2ac}} \Leftrightarrow \frac{b}{b^2+ac} \leq \frac{1}{2\sqrt{ac}} \\ c^2 + ab &\geq 2\sqrt{c^2ab} \Leftrightarrow \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2\sqrt{c^2ab}} \Leftrightarrow \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}} \end{aligned} \quad (2p)$$

De asemenea:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) &\geq \sqrt{\frac{1}{ab}} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &\geq \sqrt{\frac{1}{bc}} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) &\geq \sqrt{\frac{1}{ac}} \end{aligned} \quad (2p)$$

Din relațiile de mai sus obținem

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ac} + \frac{c}{c^2+ab} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right). \end{aligned} \quad (2p)$$

Prin urmare :

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ac} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right). \quad (1p)$$

Problema 2

 Fie $a \in \mathbb{R}$. Rezolvați ecuația :

$$[x]^2 + \left[x + \frac{1}{2} \right] = a + [2x], \text{ unde } [x] \text{ este partea întregă a numărului real } x.$$

GM nr.11/2013
Soluție:

 Se cunoaște egalitatea lui Hermite pentru $n=2$:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]. \quad (2p)$$

Ecuatia din enunţ devine:

$$[x]^2 + [2x] - [x] = a + [2x] \Leftrightarrow [x]^2 - [x] = a \Leftrightarrow [x]^2 - [x] - a = 0. \quad (1p)$$

Ultima ecuaţie are soluţii reale $\Leftrightarrow 1 + 4a \geq 0, a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \in \mathbb{N}. \quad (1p)$

Pe de altă parte: $[x]^2 - [x] = a \Leftrightarrow [x]([x] - 1) = a, a \in \mathbb{N}. \quad (1p)$

Prin urmare dacă $a = (k - 1)k, k \in \mathbb{N}$ atunci ecuaţia se reduce la:

$$[x] = k, k \in \mathbb{N} \text{ şi soluţia va fi } x \in [k, k + 1). \quad (1p)$$

Pentru celelalte valori reale ale lui a ecuaţia nu are soluţii reale. (1p)

Problema 3

Fie şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit astfel: $a_1 = 0$ şi $a_{n+1} = a_n + \sqrt{4a_n + 1} + 1, n \geq 1.$

a) Să se determine $a_n.$

b) Să se arate că $\sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \dots + \sqrt{4a_n + 1} = n^2, n \geq 1.$

G.M. nr. 11/2011

Soluție: a) $a_1 = 0.$ În relaţia din enunţ dăm valori lui $n \in \mathbb{N}^*.$

Pentru $n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + \sqrt{4a_1 + 1} + 1 \Rightarrow a_2 = 2 = 1 \cdot 2$

Pentru $n = 2 \Rightarrow a_3 = 6 = 2 \cdot 3$

Pentru $n = 3 \Rightarrow a_4 = 12 = 3 \cdot 4$

.....
Pentru $n = n - 1 \Rightarrow a_n = (n - 1) \cdot n \dots\dots\dots(2p)$

Demonstrăm prin inducţie matematică că $a_n = (n - 1) \cdot n \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

1) Verificarea este făcută.

2) $P(k) \rightarrow P(k + 1) \Leftrightarrow a_k = (k - 1) \cdot k \stackrel{?}{\Rightarrow} a_{k+1} = k(k + 1)$

Cum $a_{k+1} = a_k + \sqrt{4a_k + 1} + 1$ şi $a_k = (k - 1) \cdot k \Rightarrow$

$$a_{k+1} = (k - 1) \cdot k + \sqrt{4k(k - 1) + 1} + 1$$

$$a_{k+1} = k^2 - k + \sqrt{(2k - 1)^2 + 1} + 1$$

$$a_{k+1} = k^2 + k = k(k + 1)$$

Din 1) şi 2) $\Rightarrow a_n = (n - 1)n, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots(2p)$

b) Vom calcula suma $S_n = \sqrt{4a_1 + 1} + \sqrt{4a_2 + 1} + \dots + \sqrt{4a_n + 1}$

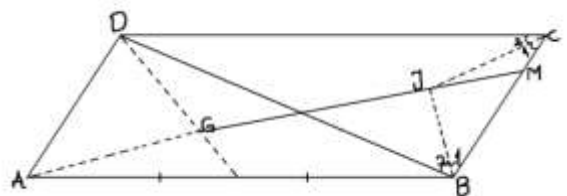
$$S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{4a_k + 1} = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 \dots\dots\dots(3p)$$

Problema 4

În paralelogramul ABCD avem AB=4, BD=3, BC=2. Fie G= centrul de greutate al $\Delta ABD,$ I=centrul cercului înscris în ΔBCD şi $M \in (BC)$ astfel încât $\overline{BM} = \overline{2MC}.$ Să se arate că G, I, M sunt coliniare.

Soluție:

Cum G este centrul de greutate al ΔABD avem:



$$\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_D) \quad (1) \quad (1p)$$

Cum I= centrul cercului înscris în ΔBCD de laturi 4, 3 și 2 avem:

$$\vec{r}_I = \frac{4\vec{r}_B + 3\vec{r}_C + 2\vec{r}_D}{4+3+2} \quad (2) \quad (1p)$$

$$\text{Cum } \frac{BM}{MC} = 2 \Rightarrow \vec{r}_M = \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{2}{3}\vec{r}_C \Rightarrow \vec{r}_M = \frac{1}{3}(\vec{r}_B + 2\vec{r}_C) \quad (3) \quad (1p)$$

$$\text{Dar } ABCD \text{ este paralelogram} \Rightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D \quad (4) \quad (1p)$$

$$\text{Din } \stackrel{(1) \text{ și } (4)}{\implies} \vec{r}_G = \frac{1}{3}(2\vec{r}_B + 2\vec{r}_D - \vec{r}_C) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \vec{MG} &= \vec{r}_G - \vec{r}_M \stackrel{(3) \text{ și } (5)}{\implies} \vec{MG} = \frac{1}{3}(2\vec{r}_B + 2\vec{r}_D - \vec{r}_C) - \frac{1}{3}(\vec{r}_B + 2\vec{r}_C) \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{MG} &= \frac{1}{3}(\vec{r}_B + 2\vec{r}_D - 3\vec{r}_C) \quad (6) \quad (1p) \end{aligned}$$

$$\vec{MI} = \vec{r}_I - \vec{r}_M \stackrel{(2) \text{ și } (3)}{\implies} \vec{MI} = \frac{1}{9}(4\vec{r}_B + 3\vec{r}_C + 2\vec{r}_D) - \frac{1}{3}(\vec{r}_B + 2\vec{r}_C)$$

Obținem:

$$\vec{MI} = \frac{1}{9}(\vec{r}_B + 2\vec{r}_D - 3\vec{r}_C) / \cdot 3 \Rightarrow 3\vec{MI} = \frac{1}{3}(\vec{r}_B + 2\vec{r}_D - 3\vec{r}_C) \quad (7) \quad (1p)$$

$$\stackrel{(6) \text{ și } (7)}{\implies} \vec{MG} = 3\vec{MI} \Rightarrow \text{punctele G, I, M sunt coliniare.} \quad (1p)$$