

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a X-a

VARIANTA 2

1. Se consideră numerele complexe z_1, z_2, \dots, z_n , nenule, astfel încât

$$z_k \cdot z_{k+1} - (1 - i)z_k - i = 0,$$

Calculați produsul $z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n$, $n \in \mathbf{N}^*$

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2^{5x+7} + 4^{4y+5} + 16^{3z+4} + 256^{t+3} = 64 \\ \log_2(5x+7) + \log_2(4y+5) + \log_2(3z+4) + \log_2(t+3) = 2 \end{cases}$$

3. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$. Să se arate că:

$$\frac{n-1}{2} + \frac{1}{1+x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \leq n - 1 + \frac{1}{1+x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Gazeta Matematică nr. 11 / 2013

4. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, care verifică relația: $(f \circ f)(x) = x^3 + x - 8$ (\forall) $x \in \mathbf{R}$.

Știind că orice ecuație polinomială $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = 0$ cu coeficienții reali și de grad impar n are cel puțin o rădăcină reală:

a) să se arate că funcția f este bijectivă,

b) Calculați $f(2)$.

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.