

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a X-a

VARIANTA 2

BAREM DE CORECTARE:

Subiectul 1.a) $z_{k+1} = \frac{(1-i)z_k + i}{z_k}$ 1p

$z_{k+2} = \frac{(-i)z_k + i + 1}{(1-i)z_k + i}$ 1p

$z_{k+3} = \frac{1}{-iz_k + 1 + i}$ 1p

$z_{k+4} = z_k$ 1p

finalizare3p

Subiectul 2. Din a doua ecuație rezultă : $(5x + 7)(4y + 5)(3z + 4)(t + 3) = 2^2 = 4$2p

$64 \geq 4^4 \sqrt[4]{2^{(5x+7)+2(4y+5)+4(3z+4)+8(t+3)}} \geq 4^4 \sqrt[4]{2^4 \sqrt[4]{64(5x+7)(4y+5)(3z+4)(t+3)}} = 4 \cdot 2^4 \sqrt[4]{64 \cdot 4} = 64$ 3p

Finalizare $x=3/2; y = 3/4; z = -1; t = -5/2$

.....2p

Subiectul 3. Inducție matematică: $n=1$ Vom avea egalitate peste tot1p

$n = 2 : \frac{1}{2} + \frac{1}{1+ab} \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq 1 + \frac{1}{1+ab}$ și demonstrație2p

$P(n) \rightarrow P(n+1) : \frac{n}{2} + \frac{1}{1+x_1x_2 \dots x_{n-1}(x_n x_{n+1})} = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x_1x_2 \dots x_{n-1}(x_n x_{n+1})} \leq \frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_{n-1}} + \frac{1}{1+x_n x_{n+1}} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_{n+1}}$ 2p

$n + \frac{1}{1+x_1 \dots x_{n+1}} = n-1 + 1 + \frac{1}{1+x_1x_2 \dots x_{n-1}(x_n x_{n+1})} \geq \frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_{n-1}} + \frac{1}{1+x_n x_{n+1}} + 1 \geq \frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_{n+1}}$ 2p

Subiectul 4. a) $h(x) = x^3 + x - 8$ injectivă, rezultă $f \circ f$ injectivă, deci f injectivă2p

Din ipoteză pt $(\forall) y \in \mathbf{R}$, ecuația $x^3 + x - 8 - y = 0$ are soluție reală, deci $\exists x \in \mathbf{R}$,

a.î. $h(x) = y$, adică h este surjectivă, de unde rezultă f surjectivă2p

f injectivă și surjectivă, deci bijectivă1p

$b) f(f(f(x))) = f(x^3 + x - 8) = f^3(x) + f(x) - 8$ 1p

pentru $x = 2$ avem $f(2^3 + 2 - 8) = f^3(2) + f(2) - 8$, rezultă $f(2) = 2$ 1p