Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 31 ianuarie 2014
Clasa a VII-a
SOLUȚII

Subiectul 1. Să se determine $\overline{abc}$ și $k \in \mathbb{N}^*$ știind că

$$\frac{\overline{ab}}{2} = \frac{\overline{bc}}{5} = \frac{\overline{ca}}{k}.$$

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție. $\frac{\overline{ab}}{2} = \frac{\overline{bc}}{5} \Rightarrow 5 \cdot \overline{ab} = 2 \cdot \overline{bc} \Rightarrow 5 \cdot (10a + b) = 2 \cdot (10b + c) \Rightarrow 50a + 5b = 20b + 2c \Rightarrow$

$\Rightarrow 50a = 15b + 2c \Rightarrow c \,\vdots\, 5 \Rightarrow c = 5.$ 2p

Relația devine $50a = 15b + 10 \Rightarrow 10a = 3b + 2 \Rightarrow 3b + 2 \,\vdots\, 10 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 10a = 20 \Rightarrow a = 2.$ 2p

Obținem $\overline{abc} = 265$ 1p

și $\frac{26}{2} = \frac{65}{5} = \frac{52}{k} \Rightarrow k = 2.$ 2p

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 31 ianuarie 2014
Clasa a VII-a
SOLUȚII

Subiectul 2. Se dă mulțimea $A=\left\{\sqrt{n+2}+\frac{3}{\sqrt{4n+5}}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Să se determine $A\cap\mathbb{Q}$.

b) Să se determine cel mai mic element al mulțimii A.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție. a) Fie $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n+2}+\frac{3}{\sqrt{4n+5}}=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{Q}^*\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{4n+5}}=\alpha-\sqrt{n+2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{9}{4n+5}=\alpha^2-2\alpha\sqrt{n+2}+n+2\Rightarrow 2\alpha\sqrt{n+2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{n+2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow n+2=p^2$, $p\in\mathbb{N}$. 1p

$\sqrt{n+2}=\alpha-\frac{3}{\sqrt{4n+5}}\Rightarrow n+2=\alpha^2-\frac{6\alpha}{\sqrt{4n+5}}+\frac{9}{4n+5}\Rightarrow\frac{6\alpha}{\sqrt{4n+5}}\in\mathbb{Q}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{4n+5}\in\mathbb{Q}\Rightarrow 4n+5=q^2$, $q\in\mathbb{N}$. 1p

$\Rightarrow 4\left(p^2-2\right)+5=q^2\Rightarrow 4p^2-q^2=3\Rightarrow(2p-q)(2p+q)=3\Rightarrow$

$\Rightarrow 2p-q=1$ și $2p+q=3\Rightarrow p=q=1\Rightarrow n+2=1\Rightarrow n=-1\notin\mathbb{N}$.

Deci $A\cap\mathbb{Q}=\varnothing$. 2p

b) Notăm $a_n=\sqrt{n+2}+\frac{3}{\sqrt{4n+5}}$, $n\ge 0$ și analizăm inegalitatea

$$a_{n+1}>a_n\Leftrightarrow\sqrt{n+3}+\frac{3}{\sqrt{4n+9}}>\sqrt{n+2}+\frac{3}{\sqrt{4n+5}}\Leftrightarrow\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}>\frac{3}{\sqrt{4n+5}}-\frac{3}{\sqrt{4n+9}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}>\frac{3\left(\sqrt{4n+9}-\sqrt{4n+5}\right)}{\sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{n+3-n-2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}>\frac{3(4n+9-4n-5)}{\sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}\left(\sqrt{4n+9}+\sqrt{4n+5}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}} > \frac{12}{\sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}\left(\sqrt{4n+9}+\sqrt{4n+5}\right)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}\left(\sqrt{4n+9}+\sqrt{4n+5}\right) > 12\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}\right)$ (1) 1p

Pentru $n \geq 1$, (1) $\Leftrightarrow \sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{2n+\frac{9}{2}}+\sqrt{2n+\frac{5}{2}}\right) > 12\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}\right)$.

Dar $n \geq 1 \Rightarrow \sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}\cdot\sqrt{2} \geq \sqrt{9}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{26} > 3\sqrt{16} = 12$, $2n+\frac{9}{2} > n+3$,

$2n+\frac{5}{2} > n+2$ și prin înmulțirea inegalităților, (1) este adevărată. 1p

Pentru $n=0$, (1) devine

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{9}\left(\sqrt{5}+\sqrt{9}\right) > 12\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{5}\left(\sqrt{5}+3\right) > 4\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \Big|^{2} \Leftrightarrow 5\left(14+6\sqrt{5}\right) > 16\left(5+2\sqrt{6}\right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 70+30\sqrt{5} > 80+32\sqrt{6} \Leftrightarrow 30\sqrt{5} > 10+32\sqrt{6}$, fals.

Deci $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \geq 1$ și $a_1 < a_0 \Rightarrow a_1 = \sqrt{3}+1$ este cel mai mic element din A. 1p

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 31 ianuarie 2014
Clasa a VII-a
SOLUȚII

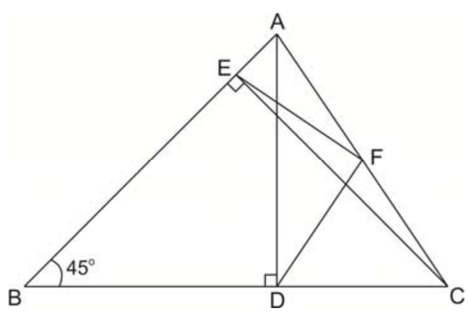
Subiectul 3. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $\mathrm{m}(\sphericalangle B)=45^\circ$, $AD \perp BC$ și $CE \perp AB$, unde $D \in BC$ și $E \in AB$. Dacă F este mijlocul laturii $[AC]$, arătați că:

a) $FE = FD$;

b) $EF \perp FD$.

Al. Gabriel Mîrșanu, profesor, Iași

Soluție.



a) $[DF]$ este mediană în ΔADC dreptunghic $\Rightarrow DF = \frac{1}{2}AC$ (1) 1p

$[EF]$ este mediană în ΔAEC dreptunghic $\Rightarrow EF = \frac{1}{2}AC$ (2) 1p

Concluzia: $FE = FD$. 1p

b) Din (1) $\Rightarrow \Delta FDC$ isoscel cu $\sphericalangle FDC \equiv \sphericalangle FCD$ (3) 0,5p

Din (2) $\Rightarrow \Delta FAE$ isoscel cu $\sphericalangle FEA \equiv \sphericalangle FAE$ 0,5p

$\sphericalangle EFC$ este exterior pentru $\Delta EFA \Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle EFC) = 2\cdot\mathrm{m}(\sphericalangle A)$ 1p

Din (3) $\Rightarrow \mathrm{m}(\sphericalangle DFC) = 180^0 - 2\cdot m(\sphericalangle C)$ 1p

$\mathrm{m}(\sphericalangle EFD) = \mathrm{m}(\sphericalangle EFC) - \mathrm{m}(\sphericalangle DFC) = 2\left(\mathrm{m}(\sphericalangle A)+\mathrm{m}(\sphericalangle C)\right) - 180^0 = 2\cdot 135^0 - 180^0 = 90^0$,

deci $EF \perp FD$. 1p

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 1 februarie 2014
Clasa a VII-a
SOLUȚII

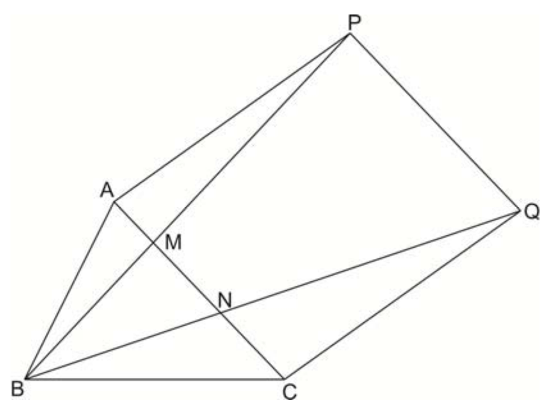
Subiectul 4. Pe latura $[AC]$ a triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încât $AM = 3$ cm, $MN = 4$ cm, $NC = 5$ cm, iar pe semidreptele $(BM$ și $(BN$ se iau punctele P, respectiv Q cu proprietatea $\frac{BM}{MP} = \frac{BN}{NQ} = \frac{1}{2}$.

a) Să se demonstreze că triunghiurile ABQ și BCP au același centru de greutate.

b)Să se determine raportul ariilor triunghiurilor ABM și CNQ.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Soluție.



a) $\frac{BM}{MP} = \frac{BN}{NQ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BM}{BP} = \frac{BN}{BQ} = \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta BMN \sim \Delta BPQ$ cu $\frac{MN}{PQ} = \frac{1}{3}$ 1p

$\Rightarrow PQ = 3MN = 12$ cm $\Rightarrow PQ = AC$.

În plus, $MN \parallel PQ \Rightarrow AC \parallel PQ$, deci $ACPQ$ este paralelogram 1p

Notăm $AQ \cap CP = \{O\} \Rightarrow O$ este mijlocul diagonalei $[AQ]$ dar și al diagonalei $[CP] \Rightarrow$

$\Rightarrow [BO]$ mediană în triunghiul BAQ dar și în triunghiul BCP și cum centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază $\Rightarrow$ centrele de greutate ale celor două triunghiuri coincid. 2p

b) $\frac{A_{\Delta ABM}}{A_{\Delta APM}}=\frac{\frac{BM\cdot d\left(A,BM\right)}{2}}{\frac{PM\cdot d\left(A,PM\right)}{2}}=\frac{BM}{PM}=\frac{1}{2}$ 1p

$\frac{A_{\Delta CNQ}}{A_{\Delta APM}}=\frac{\frac{CN\cdot d\left(Q,CN\right)}{2}}{\frac{AM\cdot d\left(P,AM\right)}{2}}=\frac{CN}{AM}=\frac{5}{3}$ 1p

$\frac{A_{\Delta ABM}}{A_{\Delta CNQ}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot A_{\Delta APM}}{\frac{5}{3}\cdot A_{\Delta APM}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{10}.$ 1p