Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VI-a, Bucureşti, 09.11.2013

Clasa a VII-a

1. Se consideră mulțimea $A=\left\{\frac{1}{22\cdot 23},\frac{1}{23\cdot 24},\frac{1}{24\cdot 25},...,\frac{1}{65\cdot 66}\right\}$.

a) Calculați suma elementelor mulțimii *A*;

b) Arătați că există două submulțimi disjuncte *X* şi *Y* ale mulțimii *A* cu proprietățile $X\cup Y=A$ şi suma elementelor din mulțimea *X* să fie egală cu suma elementelor din mulțimea *Y*.

2. Pe axa numerelor, în punctul *O* se află o lăcustă. Lăcusta se poate deplasează prin sărituri. Lungimea fiecărei sărituri este element al mulțimii $\{1,2,3,...,k\}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$.

Lăcusta face un parcurs de *k* sărituri de lungimi diferite în sensul pozitiv al axei, ajungând în punctul *A* . Lăcusta îşi propune ca, prin parcursuri succesive *A* – *O*, *O* – *A*, *A* – *O* etc, să atingă toate punctele de coordonate naturale interioare segmentului $[OA]$ fără a trece de două ori prin acelaşi punct. (Un parcurs se încheie sau în punctul *A* sau în punctul *O*)

a) Pentru $k=4$, elaborați un model al unei astfel de succesiuni de parcursuri ;

b) Arătați că, dacă o astfel de succesiune de parcursuri este posibilă, atunci *k* este par.

3. Dacă *n* este un număr natural prim şi numărul $2n^2+1$ este deasmenea prim, stabiliți dacă numărul n^6+2 este prim.

4. Se consideră dreptunghiul *ABCD*. În exteriorul dreptunghiului se construiesc triunghiurile echilaterale *BCE* şi *CDF*. Dreapta *AE* intersectează dreapta *DC* în punctul *P*, iar dreapta *AF* intersectează dreapta *BC* în punctual *Q*. Demonstrați că triunghiul *APQ* este echilateral.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7;
Timp de lucru: 3 ore efectiv.

Concursul național de matematică

“LAURENȚIU PANAITOPOL”

Ediția a VI-a, Bucureşti, 09.11.2013

Clasa a VII-a

Soluții şi bareme

Problema1

Se consideră mulțimea $A=\left\{\frac{1}{22\cdot 23},\frac{1}{23\cdot 24},\frac{1}{24\cdot 25},...,\frac{1}{65\cdot 66}\right\}$.

a) Calculați suma elementelor mulțimii *A*;

b) Arătați că există două submulțimi disjuncte *X* şi *Y* ale mulțimii *A* cu proprietățile $X\cup Y=A$ şi suma elementelor din mulțimea *X* să fie egală cu suma elementelor din mulțimea *Y*.

a) Avem $\frac{1}{22\cdot 23}+\frac{1}{23\cdot 24}+\frac{1}{24\cdot 25}+...+\frac{1}{65\cdot 66}=\frac{1}{22}-\frac{1}{66}=\frac{1}{33}$	**3p**
b) Deoarece suma elementelor din mulțimea *X* este egală cu $\frac{1}{33}:2=\frac{1}{66}=\frac{1}{22}-\frac{1}{33}$ vom considera $X=\left\{\frac{1}{22\cdot 23},\frac{1}{23\cdot 24},\frac{1}{24\cdot 25},...,\frac{1}{32\cdot 33}\right\}$, iar $Y=A-X$	**4p**

Problema2

Pe axa numerelor, în punctul *O* se află o lăcustă. Lăcusta se poate deplasează prin sărituri. Lungimea fiecărei sărituri este element al mulțimii $\{1,2,3,...,k\}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$.

Lăcusta face un parcurs de *k* sărituri de lungimi diferite în sensul pozitiv al axei, ajungând în punctul *A* . Lăcusta îşi propune ca, prin parcursuri succesive *A* – *O*, *O* – *A*, *A* – *O* etc, să atingă toate punctele de coordonate naturale interioare segmentului $[OA]$ fără a trece de două ori prin acelaşi punct. (Un parcurs se încheie sau în punctul *A* sau în punctul *O*)

a) Pentru $k=4$, elaborați un model al unei astfel de succesiuni de parcursuri ;

b) Arătați că, dacă o astfel de succesiune de parcursuri este posibilă, atunci *k* este par.

a) Pentru $k=4$, punctul *A* are abscisa 10. Punctele interioare segmentului (OA) au abscisele egale cu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un model pentru o succesiune de parcursuri este următorul : *O* – 1- 3 - 6 - *A* *A* – 9 – 5 – 2 - *O* *O* - 4 – 7 – 8 - *A*	**4p**
b) Într-un parcurs, lăcusta atinge $k-1$ puncte interioare segmentului (OA) Punctul *A* are abscisa $1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$, deci segmentul (OA) are $\frac{k(k+1)}{2}-1=\frac{(k+2)(k-1)}{2}$ puncte interioare. Pentru o succesiune posibilă, dacă *p* este numărul de parcursuri, vom avea	**3p**

$p(k-1)=\frac{(k-1)(k+2)}{2}$, deci $k+2=2p$, prin urmare k este par.	

Problema3

Dacă n este un număr natural prim şi numărul $2n^2+1$ este deasmenea prim, stabiliți dacă numărul n^6+2 este prim.

Presupunem că $n\geq 2$ dă restul 1 sau 2 la împărțirea cu 3, atunci numărul $n^2\geq 4$ dă restul 1 la împărțirea cu 3.	**2p**
Înseamnă că numărul $2n^2$ dă restul 2 la împărțirea cu 3. Aşadar numărul $2n^2+1\geq 17$ este divizibil cu 3. Deoarece $2n^2+1$ este prim, obținem contradicție. Rezultă că $n=3$, de unde $2n^2+1=19$ care este prim.	**3p**
Avem $n^6+2=729+2=731=17\cdot 43$, deci numărul nu este prim.	**2p**

Problema4

Se consideră dreptunghiul *ABCD*. În exteriorul dreptunghiului se construiesc triunghiurile echilaterale *BCE* şi *CDF*. Dreapta *AE* intersectează dreapta *DC* în punctul *P*, iar dreapta *AF* intersectează dreapta *BC* în punctual *Q*. Demonstrați că triunghiul *APQ* este echilateral.

Punctul *E* este situat pe mediatoarea segmentului $[BC]$, deci şi pe mediatoarea segmentului $[AD]$, deci $EA=ED$	**2p**
Rezultă că *E* este mijlocul segmentului $[AP]$, ipotenuza triunghiului dreptunghic *PAD*. Aşadar, $AP=2DE=2AE$. Analog, obținem $AQ=2AF$.	**2p**
Triunghiurile *ABE* şi *FDA* sunt congruente(LUL), de unde obținem $AE=AF$, adică $AP=AQ$ şi $m\left(\widehat{FAE}\right)=90^\circ-\left(180^\circ-150^\circ\right)=60^\circ$. Rezultă că triunghiul *APQ* este echilateral.	**3p**