1 Clasa a V-a

1. **Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):**

   (a) Aflaţi valoarea lui x din egalitatea

   $$[(x+2013)\cdot 2013-2013]:2013=2014.$$

   Gazeta Matematică nr. 9/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (b) Determinaţi toate numerele naturale de trei cifre care au proprietatea că, atât atunci când eliminăm cifra zecilor, cât şi atunci când eliminăm cifra unităţilor, se obţine de fiecare dată un număr natural de 10 ori mai mic decât numărul iniţial.

   Gazeta Matematică nr. 5/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (c) Alex aşează 323 de timbre într-un clasor, astfel încât pe fiecare pagină să fie cu două timbre mai mult decât pe pagina precedentă. Câte timbre a aşezat Alex pe prima pagină, şi câte pagini are clasorul, dacă nu au rămas pagini libere?

   Gazeta Matematică nr. 3/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (d) Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$ ştiind că $\overline{abc}+a\cdot b\cdot c=129$ şi $\overline{cba}-c\cdot b\cdot a=315$.

   Gazeta Matematică nr. 9/2013, Suplimentul cu exerciţii

2. Aflaţi două numere naturale cu produsul egal cu 120, ştiind că împărţind suma lor la diferenţa lor, obţinem câtul 1 şi restul 10.

   Mihaela Marinescu

3. Pe un ecran este scris numărul 34. După fiecare minut, în locul numărului afişat pe ecran, se scrie un număr cu 18 mai mare decât produsl cifrelor sale.

   a) Ce număr va fi scris pe ecran după două minute?

   b) Ce număr va fi scris pe ecran după 2013 minute?

   Cristina Drăgan

2 Clasa a VI-a

1. **Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):**

   (a) Determinaţi cifrele distincte a, b şi c, cu $b<c$, ştiind că $\overline{ab}\cdot\overline{ac}=1974$.

   Gazeta Matematică nr. 9/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (b) Aflaţi numerele naturale nenule n pentru care numărul n^2+n are patru divizori.

   Gazeta Matematică nr. 5/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (c) Determinaţi toate tripletele de numere naturale x, y, z pentru care $(x+2)(2y+3)(3z+4)=2013$.

   Gazeta Matematică nr. 4/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (d) Determinaţi câte numere naturale de trei cifre dau restul 7 când sunt împărţite la un număr de o cifră.

   Gazeta Matematică nr. 4/2013, Suplimentul cu exerciţii

2. Cangurul Alef se află în punctul A şi poate face doar sărituri de 3 metri. Cangurul Dalet se află în punctul D, aflat la 2013 m de A, şi poate face doar sărituri de 5 metri. Ei vor să facă schimb de locuri, sărind unul spre altul, pe dreapta care uneşte punctele A şi D.

   a) Arătaţi că Alef poate ajunge în D, dar Dalet nu poate ajunge în A.

   b) La câţi metri de A, pe drumul dinspre D spre A, se află cel mai apropiat punct în care poate ajunge Dalet?

   c) Ştiind că cei doi canguri pleacă simultan şi efectuează săriturile în acelaşi timp, arătaţi că ei nu se pot întâlni (nu pot ateriza în acelaşi punct).

   d) Prin câte puncte comune au trecut cei doi canguri până când Alef ajunge în D ?

   Costel Anghel

3. Determinaţi câte numere naturale de trei cifre se pot scrie sub forma $\overline{abc}+\overline{ab}+a$.

   Andrei Eckstein

3 Clasa a VII-a

1. **Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):**

   (a) Aflaţi numerele naturale nenule x, y, z, t ştiind că $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{z}}} = \dfrac{187}{29}$.

   Gazeta Matematică nr. 2/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (b) Fie a, b, c numere raţionale astfel încât $b \neq 2c$ şi $\dfrac{a-b+2c}{a-2b+5c} = \dfrac{1}{2}$. Calculaţi raportul $\dfrac{a-3b+5c}{5a-24b+43c}$.

   Gazeta Matematică nr. 1/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (c) Determinaţi numerele pozitive x, y, z ştiind că $xy + yz + zx = 188$ şi $\dfrac{2x}{2x+6} = \dfrac{5y}{5y+25} = \dfrac{4z}{4z+16}$.

   Gazeta Matematică nr. 2/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (d) Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC. Măsurile unghiurilor $\sphericalangle AHB, \sphericalangle BHC$, respectiv $\sphericalangle CHA$ sunt direct proporţionale cu 10, 15 şi 11. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

   Gazeta Matematică nr. 4/2013, Suplimentul cu exerciţii

2. Fie M mulţimea formată din toate numerele de 8 cifre distincte care se scriu folosind cifrele de la 2 la 9.

   a) Determinaţi numărul de elemente al mulţimii M.

   b) Arătaţi că oricum am alege două numere diferite din mulţimea M, restul împărţirii unuia dintre numere la celălat este nenul.

   Acad. Nicolae Teodorescu

3. Se consideră triunghiul ABC, în care $m(\widehat{BAC}) = 120°$. Bisectoarele $[AD$, $[BE$ şi $[CF$ ale triunghiului, unde $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$, se intersectează în I. Fie $\{M\} = DE \cap CF$ şi $\{N\} = DF \cap BE$. Arătaţi că:

   a) $[DE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$ şi $[DF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADB$;

   b) triunghiurile ΔMIE şi ΔNIF sunt isoscele.

   Costel Anghel

4 Clasa a VIII-a

1. **Pe foaia de examen scrieţi doar răspunsurile (rezultatele):**

   (a) Numerele reale a şi b verifică relaţia $4a^2 + 4b^2 - 12a + 12b + 18 = 0$. Calculaţi suma $a + b$.

   Gazeta Matematică nr. 3/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (b) Numerele reale x şi y au proprietăţile: $x^4 = y^4 + 48$, $x^2 + y^2 = 12$ şi $x > 2 + y$. Calculaţi $x + y$.

   Gazeta Matematică nr. 1/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (c) Fie m, n, p numere naturale nenule. Determinaţi numărul real x care verifică relaţia:

   $$\frac{x-m-n}{p} + \frac{x-n-p}{m} + \frac{x-p-m}{n} = 3.$$

   Gazeta Matematică nr. 2/2013, Suplimentul cu exerciţii

   (d) În trapezul $ABCD$, cu $AB \| CD$, se cunosc $AD = CD = 13$ cm, $BC = 8$ cm şi $m(\sphericalangle B) = 60°$. Aflaţi perimetrul trapezului.

   Gazeta Matematică nr. 2/2013, Suplimentul cu exerciţii

2. Determinaţi numerele naturale m şi n pentru care numerele $3m + 2n + 6$, $5m + 4n + 1$ şi $7m + 5n + 3$ să fie, în această ordine, pătrate perfecte consecutive.

   Aurel Doboşan

3. Spunem că un număr natural este *s-pătratic* dacă el se scrie ca suma a două pătrate perfecte. Spre exemplu, 61 este un număr *s-pătratic*, întrucât $61 = 5^2 + 6^2$.

   a) Arătaţi că produsul a două numere *s-pătratice* este un număr *s-pătratic*.

   b) Fie $n \in \mathbb{N}$ un număr natural cu proprietatea că $9n$ este un număr *s-pătratic*. Arătaţi că $13n$ este un număr *s-pătratic*.

   Costel Anghel

5 Clasa a V-a

1. (a) 2. (b) 100, 200, ..., 900 (9 numere). (c) 3 timbre pe prima pagină, 17 pagini. (d) $\overline{abc} = 123$.
2. Din teorema împărţirii cu rest, obţinem că $a + b = 1 \cdot (a - b) + 10$, de unde $b = 5$. Atunci $a = 24$.
3. (a) După un minut, pe ecran este scris numărul $3 \cdot 4 + 18 = 30$, iar după două minute este scris numărul $3 \cdot 0 + 18 = 18$.

(b) La trei minute de la pornire, pe ecran apare numărul $1 \cdot 8 + 18 = 26$, iar după încă un minut, numărul $2 \cdot 6 + 18 = 30$.

Se observă că, din acest punct, numerele afişate pe ecran încep să se repete în ordinea: 30, 18, 26, 30, 18, 26, ... (ele se repetă din trei în trei minute). Cum $2013 : 3 = 671$ (rest 0), după 2013 minute va fi afişat pe ecran acelaşi număr ca şi după trei minute, adică 26.

6 Clasa a VI-a

1. (a) $a = 4$, $b = 2$, $c = 7$. (b) $n = 2$. (c) $x = 1$, $y = 4$, $z = 19$ sau $x = 9$, $y = 0$, $z = 19$. (d) 299 (Sunt 123 de numere de forma $M_8 + 7$ şi câte 100 de numere de forma $M_9 + 7$, respectiv de forma $M_9 + 8$. Dintre acestea, 12 sunt atât de forma $M_8 + 7$ cât şi de forma $M_9 + 7$, iar alte 12 sunt atât de forma $M_8 + 7$ cât şi de forma $M_9 + 8$).
2. (a) Deoarece 2013 este divizibil cu 3 şi $2013 : 3 = 671$, Alef poate ajunge în D după 671 de sărituri.

Cum 5 nu divide 2013, Dalet nu poate ajunge în A.

(b) După p sărituri, Dalet ajunge la $2013 - 5p$ metri faţă de A. Deoarece $2013 - 5p \geq 0$, rezultă $p \leq 402$. După 402 sărituri, Dalet ajunge la 3 m de A.

(c) După n sărituri, Alef este la $3n$ metri faţă de A, iar Dalet la $2013 - 5n$ metri faţă de A. Presupunând că cei doi canguri ar ajunge în acelaşi punct după n sărituri, atunci am avea $3n = 2013 - 5n$, adică $8n = 2013$, relaţie care nu este verificată de niciun număr natural k.

(d) Dacă Alef ajunge în punctul M după m sărituri, iar Dalet după n sărituri (evident, cei doi ajung în M la momente diferite de timp), atunci, $AM = 3m$, $DM = 5n$, unde $m, n \in \mathbb{N}$ şi $3m + 5n = 2013$. Rezultă că $3 \mid n$, de unde se obţine $n = 3k$ şi $m = 671 - 5k$.

Atunci $m - 1 = 670 - 5k$, deci $5 \mid m - 1$, de unde $m = 5p + 1$, cu $p \in \mathbb{N}$. Rezultă

$$5p + 1 = 671 - 5k \Rightarrow p + k = 134.$$

Sunt posibile 135 de alegeri pentru (p, k), deci cangurii trec prin 135 de puncte comune.
3. Numărul $\overline{abc}$ poate fi ales în 900 de moduri (de la 100 la 999); pentru fiecare alegere a lui $\overline{abc}$, calculând suma $\overline{abc} + \overline{ab} + a$, obţinem 900 de rezultate. Acest lucru nu înseamnă că soluţia problemei este 900, deoarece trebuie să verificăm dacă nu cumva două sau mai multe dintre aceste rezultate sunt egale şi, de asemenea, câte dintre aceste rezultate sunt mai mari decât 999 (adică au patru cifre şi nu trei aşa cum cere problema).

Referitor la prima verificare, dacă $\overline{abc} + \overline{ab} + a = \overline{pqr} + \overline{pq} + p$, atunci $111a + 11b + c = 111p + 11q + r$. Deoarece $0 \leq 11b + c \leq 108$, rezultă că $a = p$, de unde se obţine şi că $b = q$ şi $c = r$. Aşadar, cele 900 de rezultate ale calculelor de forma $\overline{abc} + \overline{ab} + a$, când $\overline{abc}$ ia valori de la 100 la 999 sunt distincte. Să vedem câte din acestea sunt numere de patru cifre. Pentru aceasta, avem:

$$111a + 11b + c \geq 1000,$$

de unde rezultă cu necesitate $a = 9$ şi $11b + c \geq 1$, ceea ce înseamnă că dintre numerele de forma $\overline{abc}$, cu $a = 9$, doar 900 dă un rezultat "bun".

În concluzie, problema are 801 soluţii.

7 Clasa a VII-a

1. (a) $x = 6$, $y = 2$, $z = 4$, $t = 3$. (b) $\frac{1}{8}$. (c) $x = 6$, $y = 10$, $z = 8$. (d) $m(\sphericalangle A) = 30°$, $m(\sphericalangle B) = 70°$, $m(\sphericalangle C) = 80°$.

2. (a) Prima cifră a unui număr din mulţimea m se poate alege în 8 moduri, a doua în 7 moduri, a treia în 6 moduri etc. Numărul de elemente ale lui M este $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320$.

(b) Enunţul este echivalent cu a spune că niciunul dintre numerele din M nu este divizorul vreunui alt număr din M.

Împărţind pe 98765432 (cel mai mare număr al mulţimii M) la 23456789 (cel mai mic număr din M), se obţine câtul 4 (şi un rest nenul), deci dacă $x \in M$ ar fi divizibil cu $y \in M$, atunci ar trebui să aibă loc una din relaţiile $x = 2y$ sau $x = 3y$ sau $x = 4y$.

Se observă că toate numerele din M au suma cifrelor 44, deci sunt de forma $M_9 + 8$.

Concluzia rezultă din faptul că $2 \cdot (M_9 + 8) = M_9 + 7$, $3 \cdot (M_9 + 8) = M_9 + 6$ şi $4 \cdot (M_9 + 8) = M_9 + 5$.

3. (a) Construim $EP \perp AB$, $P \in AB$, $EQ \perp AD$, $Q \in AD$, $ER \perp BC$, $R \in BC$. Atunci $m(\sphericalangle EAP) = 180° - 120° = 60°$, deci $[AE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle PAD$, de unde $EP = EQ$. Dar $EP = ER$, deci $EQ = ER$, adică E se află pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$, sau, altfel spus, $[DE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADC$.

Analog se arată că $[DF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADB$.

(b) Avem $m(\sphericalangle EIC) = \frac{m(\sphericalangle B)}{2} + \frac{m(\sphericalangle C)}{2} = 30°$, iar

$$m(\sphericalangle EMC) = m(\sphericalangle MDC) + \frac{m(\sphericalangle C)}{2} = \frac{m(\sphericalangle ADC)}{2} + \frac{m(\sphericalangle C)}{2} = \frac{180° - m(\sphericalangle DAC)}{2} = 60°.$$

Rezultă $m(\sphericalangle IEM) = m(\sphericalangle EMC) - m(\sphericalangle EIM) = 30°$, deci ΔMIE este isoscel. Analog, ΔNIF este isoscel.

8 Clasa a VIII-a

1. (a) 0. (b) 1. (c) $x = m + n + p$. d) 62 cm.

2. Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k^2 = 5m + 4n + 1$; atunci $3m + 2n + 6 = (k-1)^2$ şi $7m + 5n + 3 = (k+1)^2$. Obţinem:

$$\left.\begin{array}{l} 3m + 2n + 6 = k^2 - 2k + 1 \\ 7m + 5n + 3 = k^2 + 2k + 1 \end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} 10m + 7n + 9 = 2k^2 + 2 \Rightarrow 10m + 7n + 7 = 2k^2 \Rightarrow 10m + 7n + 7 = 2(5m + 4n + 1),$$

de unde se obţine $n = 5$. Înlocuind, rezultă relaţiile $k^2 - 2k + 1 = 3m + 16$, $k^2 = 5m + 21$ şi $k^2 + 2k + 1 = 7m + 28$.

Obţinem $k = m + 3$, de unde, înlocuind în $k^2 = 5m + 21$, obţinem $m^2 + m = 12$, cu soluţia $m = 3$.

3. (a) Dacă $x = a^2 + b^2$ şi $y = c^2 + d^2$, atunci

$$\begin{aligned} xy &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = \\ &= (a^2c^2 + 2ac \cdot bd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2ad \cdot bc + b^2c^2) = \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

(b) Fie $p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât $9n = p^2 + q^2$; atunci $3 \mid p^2 + q^2$, de unde, studiind toate posibilităţile în funcţie de restul împărţirii lui p şi q la 3, se obţine că $3 \mid p$ şi $3 \mid q$, adică $p = 3r$ şi $q = 3s$, cu $r, s \in \mathbb{N}$. Atunci $9n = 9r^2 + 9s^2$, deci $n = r^2 + s^2$.

Rezultă $13n = (2^2 + 3^2)(r^2 + s^2) = (2r + 3s)^2 + (2s - 3r)^2$, adică $13n$ este număr *s-pătratic.*