INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928
FAX: 0235/311715
e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro
website : http://isj.vs.edu.ro
Nr............ din......................

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014-CLASA a IX-a

1. Dacă a, b, c sunt numere strict pozitive atunci:

a) $\left(1+\frac{a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 \geq 8$. b) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{2ab}{b^2+ca}+\frac{2bc}{c^2+ab}+\frac{2ac}{a^2+bc}$.

2. Dacă $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x atunci:

a) Rezolvaţi ecuaţia: $\left[\frac{2x+1}{3}\right]+\left[\frac{4x+5}{6}\right]=\frac{5x+1}{3}$.

b) Arătaţi că: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[2x+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[2^{2013}x+\frac{1}{2}\right]=\left[2^{2014}x\right]$.

3. a)Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$verifică egalitatea: $x_1+x_2+\cdots+x_n=an^2+bn, \forall n \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{R}$.
Să se demonstreze că acest şir este o progresie aritmetică.

b) Dacă n numere prime formează o progresie aritmetică, atunci raţia progresiei se divide prin fiecare număr prim $p < n$.

4. Fie ABC un triunghi şi H ortocentrul, iar D,E,F simetricele lui H faţă de mijloacele laturilor $(BC), (AC), (AB)$. Arătaţi că dacă triunghiurile ABC *şi* DEF au acelaţi centru de greutate atunci triunghiul ABC este echilateral.

(Supliment Gazeta matematică nr.12/ 2013)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.

BAREM DE NOTARE –clasa a IX-a

Problema	Soluţie	Punctaj
1	a) $\left(1+\frac{a}{b}\right)^2 \geq 4\frac{a}{b}$, $\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 \geq 4\frac{b}{a}$ $\left(1+\frac{a}{b}\right)^2 + \left(1+\frac{b}{a}\right)^2 \geq 4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geq 4.2 = 8;$ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2.$	1p 1p 1p
	b) Aplicand inegalitatea mediilor vom avea : $\frac{2ab}{b^2+ca} = \frac{2}{\frac{b}{a}+\frac{c}{b}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right);$ $\frac{2bc}{c^2+ab} = \frac{2}{\frac{b}{a}+\frac{c}{b}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right);$ $\frac{2ca}{a^2+bc} = \frac{2}{\frac{a}{c}+\frac{b}{a}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)$ De unde prin sumare rezulta inegalitatea ceruta.	1p 1p 1p 1p
2	a) Pentru că membrul întâi este număr întreg deducem că $\frac{5x+1}{3} \in \mathbb{Z} \rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\ a.î.$ $\frac{5x+1}{3} = n.$ Ecuaţia devine : $\left[\frac{2n+1}{5}\right] + \left[\frac{4n+7}{10}\right] = n$ (1) Din definiţia părţii întregi avem: $\frac{2n+1}{5} - 1 < \left[\frac{2n+1}{5}\right] \leq \frac{2n+1}{5}$ $şi$ $\frac{4n+7}{10} - 1 < \left[\frac{4n+7}{10}\right] \leq \frac{4n+7}{10}.$ prin adunarea şi cu relaţia (1) avem $\frac{8n-11}{10} < n \leq \frac{8n+9}{10} \rightarrow n \in \{-5,-4,\ldots,3,4\}$ şi $x = \frac{3n-1}{5.}$. b)Se aplică identitatea lui Hermite: $[x] + \left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x]$. $[x]+[x+\frac{1}{2}]+[2x+\frac{1}{2}]+\ldots+[2^{2013}x+\frac{1}{2}]=[2x]+[2x+\frac{1}{2}]+\ldots+[2^{2013}x+\frac{1}{2}]=$ $[2^2x]+[2^2x+\frac{1}{2}]+\ldots+[2^{2012}x+\frac{1}{2}]+[2^{2013}x+\frac{1}{2}]=[2^{2013}x]+[2^{2013}x+\frac{1}{2}]=[2\cdot 2^{2013}x]=[2^{2014}x]$ (3p)	1p 1p 1p 1p 3p
3	a) În relaţia din enunţ facem $n=1 \rightarrow x_1 = a$+b; ptr.$n=2 \rightarrow x_1 + x_2 = 4a$+2b→ $x_2 = 3a+b, a.$î. $x_2 - x_1 = 2a = r;$ prin metoda inducţiei pp.$x_n = x_1 + (n-1)r = a+b+(n-1).2a$ Să dem. că $x_{n+1} = x_1 + nr = a+b+n.2a;$ $în\ relaţia\ din\ enunţ$ trecem pe $n \rightarrow n+1;$ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) \rightarrow$ $an^2+bn+x_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1)\ etc.$	1p 1p 1p
	b)Fie a, a+r, a+2r, …,a+(n-1)r, n numere in progresie aritmetica si p prim, p $\angle$ n. Prin impartirea la p a acestor numere prime, vom obtine intr-o anumita ordine resturile 1,2,……..,p-1, daca $a \neq p$, sau resturile 0;1;2;…;p-1 daca a=p.	1p

	Deoarece numarul lor este mai mare decit numarul resturilor, cel putin doua vor da acelasi rest. Fie a+ir=q_1p+r, a+jr=q_2p+r cu $0 \le i \angle j \le p-1 \Rightarrow$ (j-i)r=($q_2 - q_1$)p$\Rightarrow$p divide (j-i)r, dar j-i $\angle$ p si daca p nu divide j-i atunci p divide r.	1p 2p
4	Fie M,N,P mijloacele laturilor (BC),(AC),(AB) si O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.Au loc relaţiile : Au loc relaţiile: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$= $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OD})$→ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}$ Dar $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \rightarrow$ $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$ şi relaţii analoage $\overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OC};$ Fie Q centrul de greutate al triunghiului DEF şi G centrul de greutate al triunghiului $ABC.$ Au loc relaţiile: $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = -\overrightarrow{OG};$ Dacă cele două triunghiuri au acelaşi centru de greutate vom avea $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OQ} \rightarrow$ $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OG}$ de unde $O = G$ a.î. triunghiul ABC este echilateral.	3p 2p 2p