INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928
FAX: 0235/311715
e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro
website : http://isj.vs.edu.ro
Nr............ din......................

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014-CLASA a X-a

1) a) Determinaţi funcţia $f : R \to R$ pentru care $7f(-x)+4f(x-1)=-6x-19$, oricare ar fi $x\in R$.
b) Demonstraţi că *f* este bijectivă.
c) Calculaţi suma modulelor soluţiilor ecuaţiei $(f(x))^3+8(f^{-1}(x))^3=x^2-x+1$, unde f^{-1} este inversa funcţiei *f*.

2) Sa se rezolve ecuatia : $5^{2x^2-10x+7}=\frac{x}{x^2+4}$.

3) Fie $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ astfel încât $z_1+z_3\neq 0$ şi $|z_1+z_2+z_3|=|z_2+z_3|=|z_1|$.
Să se calculeze $\frac{z_1}{z_2+z_3}$.

4) Fie $z_1, z_2, z_3 \in C$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$ şi $z_1+z_2+z_3=0$. Demonstraţi că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.

BAREM DE NOTARE – clasa a X-a

Problema	Soluţie	Punctaj
1	a) $7f(-x)+4f(x-1)=-6x-19$ $x\to 1-x \Rightarrow 7f(x-1)+4f(-x)=6x-25$ $\Rightarrow f(-x)=-2x-1 \Rightarrow f(x)=2x-1$	1,5p 1p
	b) f injectivă + surjectivă	1p
	c) $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$ $(f(x))^3+8(f^{-1}(x))^3=x^2-x+1$ $\Leftrightarrow 9x^3-9x^2+9x=x^2-x+1 \Leftrightarrow (9x-1)(x^2-x+1)=0$ $x_1=\frac{1}{9}, x_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, x_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \lvert x_1\rvert+\lvert x_2\rvert+\lvert x_3\rvert=\frac{1}{9}+2=\frac{19}{9}$.	1p 1,5p 1p
2	Pentru $x\le 0$ ecuatia nu are solutii: $5^{2x^2-10x+7}>0$ iar $\frac{x}{x^2+4}\le 0$ Pentru $x>0$ logaritmand in baza 5 egalitatea, se obtine: $2x^2-10x+7=\log_5 x-\log_5(x^2+4)$ $\log_5(x^2+4)+2(x^2+4)=\log_5 x+10x+1$ $\log_5(x^2+4)+2(x^2+4)=\log_5(5x)+2\cdot 5x$ (1) Functia $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\log_5 x+2x$ este suma a doua functii strict crescatoare ,deci este injectiva. Ecuatia (1) este echivalenta cu : $f(x^2+4)=f(5x)$ si f injectiva se obtine: $x^2+4=5x$ ecuatia are solutiile $x_1=1$ si $x_2=4$	1p 1p 1p 1p 1p 1p 1p
3	Fie $\frac{z_1}{z_2+z_3}=a+ib,\ a,b\in R.$ Egalitatea $\lvert z_1+z_2+z_3\rvert=\lvert z_2+z_3\rvert$ devine $\left\lvert (z_2+z_3)\left(\frac{z_1}{z_2+z_3}+1\right)\right\rvert=\lvert z_2+z_3\rvert \Leftrightarrow \lvert z_2+z_3\rvert\cdot\left\lvert\frac{z_1}{z_2+z_3}+1\right\rvert=\lvert z_2+z_3\rvert$ şi cum $\lvert z_2+z_3\rvert\neq 0$, rezultă $\left\lvert\frac{z_1}{z_2+z_3}+1\right\rvert=1 \Leftrightarrow \lvert a+1+bi\rvert=1$ de unde $(a+1)^2+b^2=1.$ (1) Avem $\lvert z_2+z_3\rvert=\lvert z_1\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\frac{z_1+z_3}{z_1}\right\rvert=1 \Leftrightarrow \lvert a+bi\rvert=1$ adică $a^2+b^2=1.$ (2)	1p 1p 1p 1p 1p 1p

	Din (1) rezultă $b^2 = 1 - (a+1)^2$ şi înlocuind în (2) obţinem $a^2 + 1 - (a+1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0$, deci $a = -\frac{1}{2}$ iar $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Există două soluţii : $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.	1p
4	**1)** Fie punctele $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(-z_3)$. $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 + (-z_3) \Leftrightarrow M_1M_4M_2O$ paralelogram. $OM_1 = OM_2 = r \Rightarrow M_1 M_4 M_2 O$ romb $OM_4 = \lvert -z_3 \rvert = r \Rightarrow m(M_1\hat{O}M_2) = 120^o \Rightarrow m(M_1\hat{M}_3M_2) = 60^o$ Analog $m(M_1\hat{M}_2M_3) = 60^o \Rightarrow \Delta M_1M_2M_3$ echilateral.	2p 2p 2p 1p