INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928
FAX: 0235/311715
e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro
website : http://isj.vs.edu.ro
Nr............ din......................

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014-CLASA a XI-a

1 . Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ $a.î.$ $A^2B = A^2 - B$.

a) Să se arate că matricea $I_n - B$ este inversabilă.
b) Să se demonstreze că AB = BA.

2. a) Să se găsească două matrice pătratice de ordin 2 cu elemente reale cu proprietatea că $A^2+B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
b) Să se arate că orice două matrice pătratice de ordin doi cu elemente reale cu proprietatea că $A^2+B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ nu comută.

G.M.12/2013

3. Fie $Ln = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e+x)\cdot\ln(e+zx)\cdot\ldots\cdot\ln(e+nx)-1}{x}, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze $L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{ln(e+x)^{-1}}{x}$, $L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{ln(e+x)\cdot ln(e+zx)-1}{x}$
b) Să se demonstreze că $Ln = \frac{n(n+1)}{2e}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

4. Dacă $a \in (1, \infty)$, $b \in$ **R** să se determine funcţiile continue f: **R**→ **R** cu proprietatea că f(ax+b)=f(x), (∀)x∈ **R** şi $f\left(\frac{b}{1-a}\right) = 2014$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte

Barem de notare – clasa a XI-a

Problema	Soluţie	Punctaj
1	a) Relaţia din ipoteză se mai scrie: $A^2(B-I_n)+B-I_n=-I_n \Leftrightarrow (A^2+I_n)(I_n-B)=I_n \Rightarrow$ $\Rightarrow det(I_n-B)\neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow I_n-B$ este inversabilă .	1p 1p 1p
	b) Din a) $\Rightarrow (A^2+I_n)(I_n-B)=I_n \Rightarrow (A+iI_n)(A-iI_n)(I_n-B)=I_n \Rightarrow$ (1p) $\Rightarrow (A-iI_n)(I_n-B)$ inversabilă, având inversa $(A+iI_n) \Rightarrow$ (1p) $\Rightarrow (A-iI_n)(I_n-B)(A+iI_n)=I_n \Rightarrow$ (1p) $\Rightarrow -IAB+IBA=0_n \Rightarrow AB=BA$ (1p)	
2	a) Se punctează orice exemplu care îndeplineşte condiţia din enunţ. Ex A=$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, B=$\sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	4p
	b) Prin reducere la absurd se presupune că există A, B$\in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, astfel încât AB=BA şi $A^2+B^2=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$. $det(A^2+B^2)=det\,((A+iB)(A-iB)) = det(A+iB)det(A-iB)=$ $det(A+iB)det(\overline{A+iB})=det(A+iB)\overline{det\,(A+iB)}=\lvert(det(A+iB))\rvert^2\geq 0$ $det(A^2+B^2)= -5$ Concluzia	0.5p 2p 0.5p
3	a) $L_1=\lim_{x\to 0}\frac{ln(e+x)-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\frac{x}{e}}\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$ (1p) $L_2=\lim_{x\to 0}\frac{ln(e+x)\cdot ln(e+2x)-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$ $\lim_{x\to 0}\frac{ln(e+x)\cdot ln(e+2x)-ln(e+2x)+ln(e+2x)-1}{x}$ $=\lim_{x\to 0} ln(e+2x)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{ln(e+x)-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{2x}{e}\right)}{\frac{2x}{e}}\cdot\frac{2}{e}=\frac{1}{e}+\frac{2}{e}=\frac{3}{e}$ (2p) b) Se poate utiliza metoda inducţiei matematice Pentru n = 1 afirmaţia este adevărată (conform a)) (1p)	1p 2p 1p

	Presupunem că $L_k = \frac{k(k+1)}{2e}, k \geq 1$ şi demonstrăm că $$L_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2e}$$	1p
	$$L_{k+1} = \lim_{x\to 0} \frac{ln(e+x)\cdot \ldots \cdot ln(e+kx)\cdot ln(e+(k+1)x) - 1}{x} =$$ $$= \lim_{x\to 0} \frac{ln(e+x)\cdot \ldots \cdot ln(e+kx)\cdot ln(e+(k+1)x) - ln(e+(k+1)x) + ln(e+(k+1)x) - 1}{x}$$ $$= L_k + \lim_{x\to 0} \frac{ln\left(1+\frac{(k+1)x}{e}\right)}{\frac{(k+1)x}{e}} \cdot \frac{k+1}{e} = \frac{k(k+1)}{2e} + \frac{k+1}{e} = \frac{(k+1)(k+2)}{2e}$$	2p
4	Fie y=ax+b ⇔x = $\frac{y-b}{a}$. Atunci f(y) = $f\left(\frac{y-b}{a}\right)$, (∀)y∈ **R**	1p
	f(y) = $f\left(\frac{y-b}{a}\right) = f\left(\frac{\frac{y-b(a+1)}{a^2}-b}{a}\right) = f\left(\frac{y-b\left(a^2+a+1\right)}{a^3}\right)$.	1p
	Prin inducţie matematică se obţine f(y) = $f\left(\frac{y-b\sum_{i=0}^{n-1} a^i}{a^n}\right) = f\left(\frac{y}{a^n} - \frac{b}{a-1}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)\right)$, (∀)n∈ $\mathbf{N}^*$.	2p
	Cum f este continuă pe **R** se obţine că	1p
	f(y) = $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{y}{a^n} - \frac{b}{a-1}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)\right) = f\left(\frac{b}{1-a}\right) = 2014$	1p
	Prin urmare funcţia căutată este f: **R**→ **R** f(x) = 2014, (∀)x∈ **R**	1p