INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN V A S L U I
TELEFON: 0235/311928
FAX: 0235/311715
e-mail: isjvaslui@isj.vs.edu.ro
website : http://isj.vs.edu.ro
Nr............ din......................

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014-CLASA a XII-a

1. Să se arate că $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\sin x}}{2}(1+\sin x\cos^2 x)dx$.

2. a) Demonstraţi că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pentru care $\underbrace{(f\circ f\circ \ldots f)}_{2014\ de\ f}(x)=2014^{-x}$, nu admite primitive.

b) Fie şirul cu termenul general $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}(tg^{n-1}x+tg^n x+tg^{n+1}x)dx, n\geq 1$.

Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} n(\sqrt[n^2]{nI_n}-1)$.

3. Pe mulţimea G=(0,1) se defineşte operaţia $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

a) Verificaţi dacă e = $\frac{1}{2}$ este element neutru.

b) Să se arate că (G,$*$) este grup.

c) Să se arate că funcţia f: G$\to R_+^*$, f(x) = $\frac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul (G,$*$) la grupul (R_+^*,$\cdot$).

(Gazeta Matematica, nr 12/2013)

4. Fie A un inel cu proprietatea că ecuaţia $x^2=0$ are în A numai soluţia $x=0$. Arătaţi că:

a) Dacă $ab=0, unde\ a,b\in A, atunci\ ba=0$ și $axb=0$ pentru orice $x\in A$.

b) Dacă $abc=0, unde\ a,b,c\in A$, atunci $bca=cab=0$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE – clasa a XII-a

Subiectul	Rezolvare	Punctaj
1(7p)	Notăm cu I, J respectiv integralele din membrul stâng și din membrul drept $I-J=\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}(\sin^2 x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cos^2 x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}(2\sin^2 x-$ $-1-\sin x\cos^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}(-\cos 2x-\frac{1}{2}\cos x\sin 2x)dx=$ $=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(2e^{\sin x}\cos 2x+e^{\sin x}\sin 2x)dx=$ $=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}(\sin 2x)'+(e^{\sin x})'\sin 2x dx=$ $=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(e^{\sin x}\sin 2x)' dx=-\frac{1}{4}e^{\sin x}\sin 2x\Big\|_0^{\pi/2}=0$ Deci I=J	1p 1p 1p 2p 1p 1p
2	a) Presupunem că f are primitive $\Rightarrow f$ are P.D. Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\underbrace{\mathrm{g}(\mathrm{x})=(f\circ f\circ\ldots f)}_{2014\, de\, f}(x)$ $\mathrm{f(x)=f(y)}\Rightarrow \mathrm{g(x)=g(y)}\Rightarrow 2014^{-x}=2014^{-y}\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ injectivă. f are P.D. şi f injectivă$\Rightarrow f$ strict monotonă$\Rightarrow$ $\Rightarrow f\circ f$ strict crescătoare$\Rightarrow g$ strict crescătoare (fals).	1p 1p 0,5p 0,5p
	b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\, tg^n x)dx=\frac{e^{nx}}{n}tg^n x\Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{nx}}{n}ntg^{n-1}x(1+tg^2x)dx\Rightarrow$ $\Rightarrow I_n=\frac{e^{\frac{n\pi}{4}}}{n}\Rightarrow$ $\Rightarrow \lim_{x\to\infty}n(\sqrt[n^2]{nI_n}-1)=\lim_{x\to\infty}n(e^{\frac{\pi}{4n}}-1)=\frac{\pi}{4}$	1p 2p 1p
3a	a) Definiţia elementului neutru Verificare	0,5p 0,5p
3b	b) Parte stabilă	1p

	Asociativitate Comutativitate Element neutru Elemente simetrizabile	1p 0,5p 0,5p 1p
3c	c) Definiţie Bijectivitate Morfism	0,5p 1p 0,5p
4	a) Fie $x = ba \to x^2 = (ba)(ba) = b(ab)a = 0. Dar\ x^2 = 0 \to$ x=0, adică $ba = 0$. Fie $x \in A\ arbirar; notând\ y = axb \to y^2$=$(axb)(axb) = (ax)(ba)(xb) = 0, deci\ y = 0, adică\ axb = 0.$ b) Fie $x = bca \to x^2 = (bca)(bca) = (bc)(abc)a = 0 \to x = 0, deci\ bca = 0.$ Din $b(ca)$=0+$(pct. a) \to\ (ca)b = 0\ , adică\ bac = 0$	2p 2p 2p 1p