Concursul de matematică „Laurenţiu Panaitopol"

Tulcea, 29 martie 2014

Clasa a X-a

Problema 1. Arătaţi că, dacă z este un număr complex, atunci

$$|1+z| + |1+z+z^2| \geq 1.$$

Când are loc cazul de egalitate ?

Laurenţiu Panaitopol

Problema 2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale nenule ecuaţia

$$n^{x^n} + n^{\frac{x+1}{x}} = n\,(n+1)\,,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, impar.

Problema 3. Vom spune că o funcţie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ este *rapidă* dacă are proprietatea că

$$4f(n) = f(n-1) + f(n+1),$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

a) Arătaţi că există funcţii care sunt rapide şi strict crescătoare.

b) Arătaţi că dacă o funcţie rapidă f ia valori egale în două puncte distincte, atunci există o infinitate de perechi de puncte distincte $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(a) = f(b)$.

Problema 4. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 1} + \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{tg}^2 y + 1} = \sqrt{\dfrac{20x}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \operatorname{ctg}^2 y + 1} + \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x + 1} = \sqrt{\dfrac{20y}{x+y}} \end{cases}$$