Colegiul Naţional “Mircea cel Bătrân” Constanţa

Concursul Naţional de Matematică “N. N. Mihăileanu”

Ediţia a XV-a, 31 mai 2014

Clasa a XI-a

Subiectul 1

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şirul definit prin $x_0>0$, $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}$, pentru $n\geq 0$. Să se demonstreze că

$\lim\limits_{n\to\infty} n^k(x_n-2)=0$, pentru orice număr natural *k*.

Marius Cavachi

Subiectul 2

Fie $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, unde $g(t)=\sqrt{t^2+2t+2}$ şi pentru orice *x* număr real, $f(x)$ este valoarea maximă a funcției *g* pe intervalul $[x-2,\ x]$.

a) Determinați funcția *f*.

b) Arătați că funcția *f* nu e derivabilă în $x_0=0$.

c) Arătați că șirul $(\{f(n)\})_{n\in\mathbf{N}^*}$ este convergent și aflați limita sa (s-a notat cu $\{a\}$ partea fracționară a numărului *a*).

***

Subiectul 3

a) Dacă $\alpha\in(0,1)$, $n\in\mathbf{N}^*$, $k\in\mathbf{N}^*$, atunci demonstrați că:

$$\frac{\alpha\cdot k^{\alpha-1}\cdot n^{\alpha}}{n^{2\alpha}+k^{2\alpha}}>arctg\left[\left(\frac{k+1}{n}\right)^{\alpha}\right]-arctg\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha}\right]>\frac{\alpha\cdot(k+1)^{\alpha-1}\cdot n^{\alpha}}{n^{2\alpha}+(k+1)^{2\alpha}}.$$

b) Demonstrați că $\forall n\in\mathbf{N}^*$, ecuația $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(k\cdot n)^{x-1}}{n^{2x}+k^{2x}}=\frac{x}{n}$ are soluție unică reală $x_n\in\left[\frac{1}{2},1\right)$.

c) Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\frac{\pi}{4}}$, unde $(x_n)_{n\geq 1}$ este șirul soluțiilor de la punctul b).

Nelu Chichirim

Subiectul 4

Fie $A,\ B\in\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ astfel încât $(Tr(AB))^2=Tr(A^2B^2)$. Fie $x,\ y\in\mathbf{R}$ cu $x^2+y^2=1$. Să se arate că:

a) $\det(AB-BA)=2\det(AB)$

b) $\det(xAB+yBA)=\det(AB)$

Gazeta matematică nr. 3/2014 (prelucrare)

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.