Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Filiala Tulcea

Concursul Naţional LAURENŢIU PANAITOPOL
28 martie 2014, Tulcea

ene

CLASA a XII-a

Problema 1. a) Arătaţi că există o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ F)(x) = x^6$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că nu există o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ F)(x) = x^5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Petrişor Stanciu, Tulcea

Problema 2. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom cu toate rădăcinile reale distincte. Arătaţi că pentru orice numere reale distincte $a < b$ avem inegalitatea

$$\int_a^b (P'(x))^2 dx \geqslant \frac{1}{2}(P(b)P'(b) - P(a)P'(a)).$$

G. Rene

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că oricare ar fi $x, y \in G$, $x \neq e$, există $n \in \mathbb{N}^*$ – care depinde de x şi de y – astfel încât $x^n = y$ (e este elementul neutru al grupului). Arătaţi că:

a) G este finit.

b) Numărul elementelor lui G este număr prim.

c) Orice grup cu un număr prim de elemente are proprietatea din enunţ.

Laurenţiu Panaitopol

Problema 4. Fie A un inel şi a un element neinversabil al inelului cu proprietatea că există $b \in A$ astfel încât $ab = 1$.

a) Arătaţi că dacă $ax = 1$, $x \in A$, atunci $a(1 + b - xa) = 1$.

b) Demonstraţi că există o infinitate de elemente $c \in A$ având proprietatea că $ac = 1$.

Problema 1. a) Arătaţi că există o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ F)(x) = x^6$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că nu există o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admite o primitivă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $(f \circ F)(x) = x^5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. a) Un exemplu este funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{9}x^2$.

b) Avem $f(F(x)) = x^5$ şi cum funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^5$ este bijectivă, va rezulta că F este injectivă; deoarece F este derivabilă, deci continuă, obţinem că F este strict monotonă. Aşadar $F'(x) = f(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ sau $F'(x) = f(x) < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce este evident fals, câtă vreme funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^5$ nu are semn constant pe $\mathbb{R}$.

Problema 2. Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ un polinom cu toate rădăcinile reale distincte. Arătaţi că pentru orice numere reale distincte $a < b$ avem inegalitatea

$$\int_a^b (P'(x))^2 dx \geqslant \frac{1}{2}(P(b)P'(b) - P(a)P'(a)).$$

Soluţie. Fie $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ rădăcinile reale ale lui P. Derivând relaţia $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k}$ obţinem $PP'' - (P')^2 \leqslant 0$. Integrând, obţinem cerinţa.

Problema 3. [*Laurenţiu Panaitopol*] Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că oricare ar fi $x, y \in G$, $x \neq e$, există $n \in \mathbb{N}^*$ – care depinde de x şi de y – astfel încât $x^n = y$ (e este elementul neutru al grupului). Arătaţi că:

a) G este finit.

b) Numărul elementelor lui G este număr prim.

c) Orice grup cu un număr prim de elemente are proprietatea din enunţ.

Soluţie. a) Fie $x \neq e$ şi $\langle x \rangle$ subgrupul său generat în G. Cum pentru orice $y \in G$ există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^n = y$, deducem că $G = \langle x \rangle$, deci G este ciclic. Cum există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^m = e$, deducem că ordinul lui x este finit, deci G este finit.

b) Fie p ordinul lui G. Cum orice grup ciclic are $\varphi(p)$ generatori, iar din punctul a) rezultă că orice element nenul e generator al lui G, obţinem $\varphi(p) = p - 1$, i.e. p este prim.

c) Fie G un grup cu p elemente, p prim şi $x \neq e$ un element al grupului. Avem $G = \{e, x, x^2, \ldots, e^{p-1}\}$. Cum orice element din G este de forma x^n, $n = 1, 2, \ldots, p - 1$, iar $(\mathbb{Z}_p, \cdot)$ este grup, rezultă că G are proprietatea din enunţ.

Problema 4. Fie A un inel şi a un element neinversabil al inelului cu proprietatea că există $b \in A$ astfel încât $ab = 1$.

a) Arătaţi că dacă $ax = 1$, $x \in A$, atunci $a(1 + b - xa) = 1$.

b) Demonstraţi că există o infinitate de elemente $c \in A$ având proprietatea că $ac = 1$.

Soluţie. a) Avem $a(1+b-xa) = a + ab - axa = a + 1 - (ax)a = a + 1 - 1 \cdot a = a + 1 - a = 1$.

b) Fie S mulţimea $\{c \in A \mid ac = 1\}$. Funcţia $f : S \to S$, $f(x) = 1 + b - xa$ este bine definită. Cum $f(x) = f(y) \Longrightarrow xa = ya \Longrightarrow x = xab = yab = y$, funcţia este injectivă.

Pe de altă parte, nu există $x \in S$ astfel ca $f(x) = b$, deoarece am avea $xa = 1 = ax$, i.e. a ar fi inversabil, fals. Deducem că f nu este surjectivă, deci S este infinită.