Colegiul Naţional "Mircea cel Bătrân" Constanţa

Concursul Naţional de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediţia a XV-a, 31 mai 2014

Clasa a XII-a

Subiectul 1

Fie $(GL_3(\mathbf{Q}), \cdot)$ grupul matricelor inversabile de ordinul 3 cu elemente raționale.

a) Să se arate că pentru orice matrice $A \in GL_3(\mathbf{Q})$, există și este unic $p(A) \in \mathbf{Z}$ astfel încât $\det A = \frac{m}{n} \cdot 2^{p(A)}$, unde m, n sunt numere întregi impare.

b) Demonstrați că funcția $f: GL_3(\mathbf{Q}) \to GL_3(\mathbf{Q})$ definită prin $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p(A) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $p(A)$ este numărul asociat matricei A de la punctul a), este un morfism de grupuri.

****

Subiectul 2

a) Se consideră inelul $(\mathbf{Z}_8, +, \cdot)$ și mulțimea $M = \{x^2 \mid x \in \mathbf{Z}_8\}$. Aflați numărul elementelor mulțimii M.

b) Fie polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$, $f = 2X^3 + 2aX^2 + (a^2 - 7)X + b$. Să se arate că f **nu** poate avea toate rădăcinile raționale.

Cătălin Zîrnă

Subiectul 3

Fie $f: [0, 1] \to (0, \infty)$ continuă și $a_n = \int_0^1 x^n \cdot f(x)dx, \ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

a) Demonstrați că $a_n > 0, \ \forall n \in \mathbf{N}^*$.

b) Demonstrați că șirul $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit. **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Nelu Chichirim, Constanța

Subiectul 4

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\left\{\frac{n}{\sqrt{1}}\right\} + \left\{\frac{n}{\sqrt{2}}\right\} + \cdots + \left\{\frac{n}{\sqrt{n^2}}\right\}\right)$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului a.

Se presupune cunoscut faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

Gazeta matematică, prelucrare

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.