

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIȚIA a VI-a, TULCEA, 29 martie 2014

Clasa a VII - a

1. Se consideră numărul $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99}$. Dacă $A = \frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$, arătați că numerele p și q dau același rest la împărțirea cu 101.

2. a) Arătați că, orice număr natural nenul p , se poate scrie sub forma $p = ab + bc + ca + 1$, unde a, b și c sunt numere naturale.

b) Arătați că, orice număr natural compus n , se poate scrie sub forma $n = xy + yz + zx + 1$, unde x, y și z sunt numere naturale nenule.

3. Determinați toate perechile de numere reale (x, y) , $1 \leq x \leq y$, știind că $\frac{2x+1}{y}$ și $\frac{2y+1}{x}$ sunt simultan numere naturale.

4. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\widehat{ABC}) = 2 \cdot m(\widehat{ACB})$, $m(\widehat{BAC}) > 90^\circ$, iar punctul M este mijlocul laturii $[BC]$. Perpendiculara în punctul C pe dreapta AC intersectează dreapta AB în punctul D . Arătați că $\widehat{AMB} \equiv \widehat{DMC}$.

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.

- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

- Timp de lucru: 3 ore efectiv.