# Concursul de matematică „Laurenţiu Panaitopol”

**Tulcea, 29 martie 2014**

**Clasa a IX-a**

**Problema 1.** Se consideră hexagonul $ABCDEF$ şi punctele $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$, $S$ – mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, respectiv $[FA]$.

Arătaţi că $NR^2 = MQ^2 + PS^2$ dacă şi numai dacă $MQ \perp PS$.

*Laurenţiu Panaitopol*

**Problema 2.** Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care verifică relaţia

$$2014 f\left(f\left(x\right)\right) + 2013 f\left(x\right) = x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{Z}.$$

**Problema 3.** Arătaţi că pentru orice numere $a, b, c \in (0, 1)$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \geq \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca}.$$

**Problema 4.** Pentru o secvenţă $s = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $n \geq 2$ numere reale vom numi *succesorul* acesteia secvenţa $s' = (a_1, a_1 + a_2, a_2, a_2 + a_3, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_{n-1} + a_n, a_n)$, obţinută prin adăugarea între orice doi termeni consecutivi ai secvenţei $s$ a sumei acestora. De exemplu, pornind de la secvenţa $s = (3, 5)$ obţinem succesorul $s' = (3, 8, 5)$, care, la rândul lui, are succesorul $s'' = (3, 11, 8, 13, 5)$, etc.

Dacă formăm şirul de secvenţe $(s_n)_{n \geq 1}$ în care $s_1 = (1, 2, 3, \ldots, 1000)$ şi $s_{n+1}$ este succesorul lui $s_n$ pentru $n \geq 1$, aflaţi numărul apariţiilor lui 2000 în secvenţa $s_{1000}$.