Colegiul Naţional “Mircea cel Bătrân” Constanţa

Concursul Naţional de Matematică “N. N. Mihăileanu”

Ediţia a XV-a, 31 mai 2014

Clasa a IX-a

Subiectul 1

Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc de centru O. Fie P și Q simetricele ortocentrului și a vârfului A față de mijlocul laturii BC. Să se arate că $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OP}$.

***Gazeta matematică* nr. 3/2014**

Subiectul 2

Determinaţi $x,\ y,\ z \in \mathbf{N}$ astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

***

Subiectul 3

Să se determine funcțiile $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ care verifică relația

$$f(u \cdot x + v \cdot y) = f(u) \cdot f(x) + f(v) \cdot f(y),\ \forall u,\ v,\ x,\ y \in \mathbf{Q}.$$

Cătălin Zîrnă

Subiectul 4

a) Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = x^2 - x + 1$. Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie astfel încât $f \circ g = g \circ f$, să se arate că ecuaţia $f(x) = x$ are cel puţin o soluţie reală.

b) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că $f \circ g = g \circ f$ pentru orice funcţie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de gradul al doilea. Arătaţi că $f(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

***

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.