R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a IX-a, Ştiinţe ale naturii

PROBLEMA 1

Se consideră mulţimile:

$A=\{x\in N \mid 1\le x-4\le 3\}$

$B=\{x\in Z \mid 1< x-4\le 3\}$

$C=\left\{x\in Z \mid \frac{2}{x-1}\in Z\right\}$

a) Determinaţi mulţimile A, B şi C.

b) Calculaţi $A\cap B$ *, respectiv* $B\cup C$.

PROBLEMA 2

Demonstraţi următoarele inegalităţi:

a) $(a+b)(b+c)(a+c)\ge 8abc$, *pentru orice a, b,c numere reale pozitive.*

b) $a^2+b^2\ge \frac{1}{2}$, *pentru orice a, b numere reale pozitive astfel încât a+b=1.*

PROBLEMA 3

Determinati progresia geometrică știind că $a_1+a_2+a_3=26$ *si* $a_1^2+a_2^2+a_3^2=364$.

PROBLEMA 4

Folosind metoda inducţiei matematice, arătaţi că 15^n+8^n-2 *este divizibil cu 7, oricare ar fi* $n\in \mathrm{N}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a X-a, Ştiinţe ale naturii

PROBLEMA 1

a) Calculaţi $[\log_3 7]$.

b) Arătaţi că $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_3 x}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{2014} x}}=\log_{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2014} x$.

PROBLEMA 2

Calculaţi $a=\varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^{13}+\varepsilon^{16}$, unde $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{17}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{17}$.

PROBLEMA 3

a) Determinaţi $a\in\Re$ astfel încât ecuaţia $x^2-2ax+1+a=1$ să aibă rădăcina $x_1=1+i$.

b) Rezolvaţi în C ecuaţia $z+|z|=18+2i$.

PROBLEMA 4

Fie punctele A și B din plan de afixe $z_A=1$ respectiv $z_B=i$. Să se determine afixele punctelor C și D astfel încât $ABCD$ să fie pătrat.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a XI-a, Ştiinţe ale naturii

PROBLEMA 1

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+e^{2x}-1\right)}{x}$.

b) Determinaţi numărul natural *n* pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+e^{2x}+.....+e^{nx}-n+1\right)}{x}=15.$

PROBLEMA 2

Fie $A\in M_2(R)$ *şi* $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *cu proprietatea că* $A\cdot B=B\cdot A$ *şi* $A^5=B$. *Determinaţi* $A^n, n\geq 1$.

PROBLEMA 3

Pentru fiecare $n\in Z$, notăm cu P_n punctul de coordonate $P_n(n-1,2n+1)$ din sistemul cartezian xOy.

a) Scrieţi ecuaţia dreptei P_1P_2.

b) Demonstraţi că punctele P_1, P_2, P_n sunt coliniare, oricare ar fi $n\in Z$.

c) Determinaţi $n\in Z$ ştiind că aria triunghiului OP_1P_n este egală cu 3.

PROBLEMA 4

Fie $a,b,c\in \mathrm{R}$, $\varepsilon\in \mathrm{C}\setminus\mathrm{R}$, $\varepsilon^3=1$, $A=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon^2\\ \varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon^2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\sin a & \sin b & \sin c\\ \cos a & \cos b & \cos c\end{pmatrix}$.

Să se arate că $\det(AB)=0$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a XII-a, Ştiinţe ale naturii

PROBLEMA 1

Fie mulţimea $G = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathrm{R} \right\}$. Să se demonstreze că, în raport cu înmulţirea matricelor, G formează un grup care este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale $(\mathrm{R},+)$.

PROBLEMA 2

Determinaţi funcţia $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ *care admite primitive F cu proprietatea că* $e^x F(x) = f(x), \forall x \geq 0$ *şi* $f(0) = e$.

PROBLEMA 3

Fie $G = (3,+\infty)$, $x * y = xy - 3(x+y) + 12$. Să se arate că:

a) $(G,*)$ este grup comutativ;

b) Să se calculeze: $E = (-15)*(-13)*...*(-1)*1*...*15$.

PROBLEMA 4

Să se calculeze

a) $\int \frac{2-\sqrt{x^2+2}}{x^2+2}dx$, $x \in R$

b) $\int \frac{3x-1}{x^2}dx$, $x \in (-\infty,0)$

c) $\int \frac{x^5}{x^9+1}dx$, $x \in (0,+\infty)$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.