CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a X-a

filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţe ale naturii

Subiectul I

1. Dacă $90^a = 2$, $90^b = 5$, arătaţi că $18^{\frac{a+b-1}{2(b-1)}} \in N^*$
2. Dacă $x = \lg a$, $y = \log_6 a$, $z = \log_{15} a$, atunci $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_3 a}+\frac{1}{\log_5 a}$, $a \in (1,\infty)$

Subiectul II

1. Să se arate că $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \in Q$
2. Dacă $a,b \in R, b \geq 0$ şi $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} = 2$, să se arate că $27b = (a-1)(a+8)^2$

Subiectul III

1. Fie $z \in C$ astfel încât $|z| = 1$. Să se arate că $\frac{z^n}{1+z^{2n}} \in R,\ n \in N^*$
2. Fie $z \in C - \{\pm 1\}$. Să se arate că $\frac{z-1}{z+1}$ este pur imaginar $\Leftrightarrow |z| = 1$
3. Fie $z \in C$ astfel încât $|z| < \frac{1}{3}$. Să se arate că $|(\sqrt{2}-i)z^3 - iz| < \frac{3}{4}$

Subiectul IV

Ecuaţia $z^2 + az + \frac{1}{3}(\alpha^2 + a\alpha + a^2) = 0, a, \alpha \in C$ are rădăcinile z_1, z_2. Să se arate că z_1, z_2 şi α sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu