CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Constanţa, 23.02.2014

Clasa a IX-a

filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţe ale naturii

Subiectul I

Fie $n \in N^*, n$ dat, $a,b \in (0,+\infty)$ astfel încât $ab = 1$. Demonstraţi că: $\frac{a^n}{b+1} + \frac{b^n}{a+1} \geq 1$.

Subiectul II

a) Demonstraţi că: $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}, \forall k \geq 2, k \in N$

b) Calculaţi: $\left[\sum_{k=1}^{2014} \frac{1}{k^2}\right]$, unde prin $[x]$ se defineşte partea întreagă a numărului real x.

Subiectul III

Se consideră şirurile definite prin: $a_n = 3n + 1$ şi $b_n = 3^{a_n}$

a) Demonstraţi că: $a_{n+3} + a_2 = a_{n-3} + a_8$, $n \in N, n > 3$ şi că
$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_2 \cdot b_{2n-2}$, $n > 1$.

b) Determinaţi $k \in N^*$ astfel încât $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k+1} = 7854$.

c) Calculaţi $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $n \in N$.

Subiectul IV

Fie ABC un triunghi, puncte M,N,P astfel încât $\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{O}$, $\overrightarrow{PC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{NB}$.

a) Demonstraţi că M,N,P sunt coliniare.

b) Arătaţi că $\overrightarrow{QM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{30}\overrightarrow{AC}$, unde Q este mijlocul lui $[BP]$.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu