Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a X-a

1. Fie $r > 0$ un număr real pozitiv, $a, b, c \in \mathbb{C}$ numere complexe distincte cu proprietatea că $|a| = |b| = |c| = r$, iar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ numere reale oarecare cu proprietatea că $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Arătaţi că

$$|\alpha a + \beta b + \gamma c| = r \Longleftrightarrow \alpha\beta|a - b|^2 + \alpha\gamma|a - c|^2 + \beta\gamma|b - c|^2 = 0\,.$$

2. Fie ε o rădăcină primitivă de ordinul 2014 a unităţii, iar $u, v \in \mathbb{C}$ numerele complexe date de

$$u = 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + 2014\varepsilon^{2013},$$
$$v = 1^2 + 2^2\varepsilon + 3^2\varepsilon^2 + \ldots + 2014^2\varepsilon^{2013}.$$

a) Arătaţi că $u, v \neq 0$.
b) Stabiliţi valorile minime şi maxime pe care le pot avea modulele numerelor u, respectiv v.

3. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie care verifică relaţia

$$x + y \leq 3^x f(x) + 3^y f(y) \leq (x + y)3^{x+y} \quad , (\forall)x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că funcţia f este unică şi determinaţi această funcţie.
b) Determinaţi $min(f(\mathbb{N}))$ şi $max(f(\mathbb{N}))$.
c) Arătaţi că $max(f(\mathbb{R})) = max(f([0, 2]))$.

4. Determinaţi numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei

$$3^{x^{22}} = 2014 - 28^{(1-x)^2}\,.$$

Subiect propus de lect.dr. Mihai Chiş

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!