Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a XI-a

1. Fie funcţia $F : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dată prin relaţia

$$F(X,Y) = XY - YX, \quad (\forall) X, Y \in M_n(\mathbb{R}).$$

(a) Studiaţi injectivitatea funcţiei F.

(b) Fie $M \in \mathrm{Im}(F)$ o matrice fixată. Arătaţi că există $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, inversabile, astfel încât $M = F(A,B)$.

2. Studiaţi dacă există funcţii continue $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, care verifică echivalenţa

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(2014 \cdot x) \neq 0.$$

3. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversabilă şi $B, C \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ astfel încât $C^T A^{-1} B \neq 0$. Arătaţi că ecuaţia în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$

$$\det(A - xBC^T) = 0,$$

are o singură soluţie, $x = (C^T A^{-1} B)^{-1}$.

4. Fie a, b două numere reale oarecare, iar şirurile $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ definite prin $a_1 = a$, $b_1 = b$ şi

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 - \dfrac{b_n^2}{n^2}\right), & (\forall) n \geq 1, \\ b_{n+1} = -\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) a_n b_n, & (\forall) n \geq 1. \end{cases}$$

Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = \dfrac{a_n \cdot b_n}{n}$, $(\forall) n \geq 1$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Subiect propus de conf.dr. Răzvan Tudoran

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!