Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a XII-a

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ cu elementul unitate u, cu proprietatea că pentru orice elemente $a, b \in G$ au loc egalităţile $(aba^{-1})^{22} = b^{22}$ şi $(aba^{-1})^3 = b^3$.
a) Arătaţi că grupul G este comutativ.
b) Dacă există elemente $x, y, z \in G \setminus \{u\}$ care verifică egalităţile $x^{22} = x^3$, $y^{28} = y^{81}$, respectiv $z^{21} = z^{23}$, arătaţi că există $t \in G \setminus \{u\}$ cu proprietatea că $t^{2014} = u$ şi $t^k \neq u$, $(\forall)k = \overline{1, 2013}$.

2. Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că

$$xf(y) + yf(x) \leq 1 \quad , (\forall)x, y \in [0, 1].$$

a) Demonstraţi că $\int_0^1 f(x)\, dx \leq \frac{\pi}{4}$.
b) Construiţi o funcţie cu proprietatea din enunţ, astfel încât $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{\pi}{4}$.

3. Funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este indefinit derivabilă şi are proprietatea că există $C > 0$ astfel încât expresia $E(x, n) = \frac{f^{(n)}(x)}{n+x+C}$ nu depinde de n, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$, pentru care $n+x+C \neq 0$. Dacă $f'(0) = 1$ şi $\int_0^1 f(x)\, dx = C + e - 2$, determinaţi valoarea lui C.

4. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel, iar $f : R \longrightarrow R$ o funcţie care verifică condiţiile:
i) f este surjectivă;
ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $(\forall)x, y \in R$;
iii) $x^2 - f(x) \in Z(R)$.
($Z(R) = \{a \in R | ax = xa, (\forall)x \in R\}$ este centrul inelului R). Arătaţi că
a) $xy + yx \in Z(R)$, $(\forall)x, y \in R$;
b) inelul R este comutativ.

Subiect propus de conf.dr. Silviu Birăuaş

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!