Inspectoratul şcolar judeţean Timiş

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"
Ediţia a XXVIII-a
Timişoara, 21-23 martie 2014

clasa a VIII-a

1. Numerele reale pozitive a şi b verifică egalitatea $a^{22}+b^{22}=a^3+b^3$. Arătaţi că

$$a^{2014}+b^{2014}\geq a^{2013}+b^{2013}.$$

2. (a) Fie $ABCD$ un tetraedru şi M, N mijloacele muchiilor $(BC),(AD)$. Verificaţi că are loc *identitatea lui Euler*:

$$AB^2+CD^2+AC^2+BD^2=BC^2+AD^2+4MN^2.$$

(b) Tetraedrul $ABCD$ are muchiile opuse congruente ($AB=CD, AC=BD$, $AD=BC$). Arătaţi că feţele tetraedrului sunt triunghiuri ascuţitunghice.

3. (a) Arătaţi că pentru orice numere reale a,b,c,t are loc egalitatea

$$(t-a)(t-b)(t-c)=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc.$$

(b) Numerele reale distincte $m,n,p>0$ verifică egalitatea $mn+np+pm=1$. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} m+\dfrac{yz}{x}=n+\dfrac{zx}{y}=p+\dfrac{xy}{z} \\ xyz+mnp=m+n+p. \end{cases}$$

4. Fie un tetraedru $ABCD$ în care $\widehat{BAC}\equiv\widehat{ACD}$ şi $\widehat{ABD}\equiv\widehat{BDC}$. Arătaţi că $AB=CD$.

Subiect propus de lect.dr. Ioan Caşu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt punctate cu note cuprinse între 1 şi 10.
Timp de lucru - 3 ore

Succes!