



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

*Etapa locală - 15.02.2014*

**Clasa a XII-a**

### Problema 1

Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $H$  o submulțime nevidă a sa astfel încât  $H \neq G$ . Să se arate că  $H$  este subgrup dacă și numai dacă  $\forall x \in H, \forall y \in G \setminus H \Rightarrow xy \in G \setminus H$ .

### Problema 2

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \min_{x \leq t \leq x+1} (t^2 - 2t) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

- Arătați că funcția  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$ ;
- Determinați primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ .

### Problema 3

Calculați  $\int_{-\frac{1}{2014}}^{\frac{1}{2014}} x^{2014} \arccos(2014x) dx$ .

### Problema 4

Fie mulțimea  $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \mid \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_5 \right\}$  și matricea  $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix}$ . Rezolvați în mulțimea  $M$  ecuația  $X^6 = A$ .

Probleme selectate de Prof. Nicoara Corina

- Notă:** a) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.  
b) Toate problemele sunt obligatorii.  
c) Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.