Concursul naţional de matematică ”Laurenţiu Duican”
Ediţia a XVIII-a, Braşov, 16 mai 2014

Clasa a VII-a

1. Fie M mulţimea numerelor naturale nenule care nu au divizori primi mai mari ca 10. Să se afle cel mai mic număr natural n cu proprietatea că pentru oricare submulţime A cu n elemente a lui M putem alege cu siguranţă două numere distincte din A astfel ca produsul lor să fie pătrat perfect.

Vasile Pop

2. Fie ABC un triunghi în care $AB = AC$. Considerăm $M \in (BC)$ şi $N \in (AC)$ astfel ca $\angle BAM \equiv \angle MNC$. Fie P intersecţia dintre MN şi AB. Să se arate că bisectoarele unghiurilor BAM si BPM se intersectează într-un punct de pe segmentul (BM).

Bogdan Enescu

3. Demonstraţi că suma distanţelor de la centrul de greutate al unui triunghi la laturile sale este cel puţin egală cu triplul razei cercului înscris în acel triunghi.

Aurel Bârsan

4. Fie $a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_{2014}$ o scriere arbitrară a numerelor $1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 2014$. Arătaţi că printre numerele

$$|a_1 - 1|\,,\ \ |a_2 - 2|\,,\ \ |a_3 - 3|\,,\ ...,|a_{2014} - 2014|$$

există (cel puţin) două numere egale.

* * *

Concursul naţional de matematică ”Laurenţiu Duican”
Ediţia a XVIII-a, Braşov, 16 mai 2014

Clasa a VIII-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^4.$$

Mihaly Bencze

2. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care $\frac{n+2014}{\left[\sqrt{n}\right]}$ şi $\frac{n+2013}{\left[\sqrt{n+1}\right]}$ sunt numere naturale. ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a).

Lucian Dragomir

3. Se consideră $n+1$ $(n \geq 3)$ puncte necoplanare $V, A_1, A_2, \cdots, A_n$ astfel încât oricare trei puncte sunt necoliniare.

a) Arătaţi că, punctele A_1, A_2, ...,A_n sunt coplanare dacă şi numai dacă sferele de diametre $[VA_1]$, $[VA_2]$,...,$[VA_n]$ au două puncte comune.

b) Determinaţi n ştiind că oricum am alege n sfere cu diametrele determinate de n perechi de puncte distincte ale mulţimii $\{V, A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, acestea au două puncte comune de intersecţie.

* * *

4. Determinaţi toate pătratele perfecte care au produsul cifrelor un număr prim.

Aurel Bârsan

Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XVIII-a, Braşov, 16 mai 2014

Clasa a IX-a

1. Se consideră $n+1$ vectori în plan, $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$, cu proprietatea că $|\vec{v}_k| = 2^k,\ k \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Să se arate că suma vectorilor unei submulţimi nevide arbitrare a mulţimii acestor vectori este un vector nenul.

* * *

2. Fie A o mulţime de numere reale, cu cel puţin trei elemente, având propritatea că, pentru oricare $a, b \in A$, cu $a \neq b$, avem $a^3 + b \in \mathbb{Q}$. Să se arate că $A \subset \mathbb{Q}$.

Romeo Ilie

3. Se consideră mulţimea

$$A = \left\{ \frac{4mn}{m^2 + 2n^2} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Să se determine cel mai mare număr real a şi cel mai mic număr real b astfel ca $A \subset [a, b]$.

Vasile Pop

4. Fie M şi N două puncte în planul triunghiului ascuţitunghic ABC, astfel ca:

$$(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) \overrightarrow{MN} = \operatorname{tg} A \cdot \overrightarrow{MA} + \operatorname{tg} B \cdot \overrightarrow{MB} + \operatorname{tg} C \cdot \overrightarrow{MC}.$$

Să se determine punctul N.

Dorin Andrica

Concursul naţional de matematică ”Laurenţiu Duican”
Ediţia a XVIII-a, Braşov, 16 mai 2014

Clasa a X-a

1. Fie $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = 1$. Să se arate că

$$|z^a + 1| + \left|z^{a+b} + 1\right| + \left|z^{2a+b} + 1\right| \geq 2,\ \forall\ a, b \in \mathbb{N}^*.$$

Mihaly Bencze

2. Fie $a \geq 1$. Să se arate că pentru oricare n $(n \geq 2)$ numere pozitive $x_1, x_2, \cdots, x_n$, cu suma egală cu a, are loc inegalitatea

$$x_1 + \sqrt{x_2} + \sqrt[3]{x_3} + \cdots + \sqrt[n]{x_n} \geq \sqrt[n]{a}.$$

Eugen Păltănea

3. Fie $a, b > 1$. Să se demonstreze că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:
(1) există o funcţie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile

(i) funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f\left(a^x\right) - x$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

(ii) funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = f\left(b^x\right) - x$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

(2) $a > b$.

Romeo Ilie

4. Să se demonstreze identitatea

$$C_n^1 - \frac{1}{2^2}C_n^2 + \frac{1}{3^2}C_n^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}C_n^n = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Marian Cucoaneş

Concursul naţional de matematică ”Laurenţiu Duican”
Ediţia a XVIII-a, Braşov, 16 mai 2014

Clasa a XI-a

1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că există limita

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{\frac{f(x)}{x}-3}{x}-2}{x}=1.$$

Să se calculeze limita

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{\frac{f(3x)-f(2x)}{x}-3}{x}-10}{x}.$$

Cristinel Mortici

2. a) Să se arate că $2\cos\left(2^{-(k+1)}\pi\right)=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}_{k\ radicali},\ k\in\mathbb{N}^*.$

b) Fie mulţimea $A=\{2^{-n}S_n|\ n\in\mathbb{N}^*\}$, unde

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}_{n-1\ radicali}}}.$$

Să se determine $\sup A$ (cel mai mic majorant al mulţimii A).

Gabriela Boeriu şi Eugen Păltănea

3. Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice simetrice ($A^T=A$, $B^T=B$), astfel ca

$$\operatorname{Tr}\left(A^2B^2\right)=\operatorname{Tr}\left((AB)^2\right).$$

Să se arate că $AB=BA$.

Vasile Pop

4. Să se calculeze limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha\ln^\beta(n+1)-n^\alpha\ln^\beta n}{n\ln n},$$

în raport cu parametrii reali α şi β.

Dorin Andrica

Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XVIII-a, Braşov, 16 mai 2014

Clasa a XII-a

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi n un număr natural nenul. Considerăm funcţiile $f : G \to G$, $f(x) = x^{n+1}$ şi $g : G \to G$, $g(x) = x^n$. Să se demonstreze că dacă f este morfism injectiv de grupuri şi g este funcţie surjectivă, atunci grupul G este comuntativ.

Marian Cucoaneş

2. Fie $GL_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ grupul multiplicativ al matricilor inversabile şi

$$H = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

un subgrup al său cu $n \geq 2$ elemente astfel ca

$$\sum_{k=1}^{n} Tr(A_k) = 0.$$

a) Să se dea un exemplu de un astfel de subgrup H.

b) Să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k = O_2$.

Vasile Pop

3. Calculaţi

$$\int \frac{(x^2-1)(x^8+3x^6+6x^4+3x^2+1)dx}{x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1}.$$

Mihály Bencze

4. Dacă $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ este o funcţie cu derivată continuă care verifică condiţiile

a) $|f'(x)| \leq \frac{c}{x}$, pentru orice $x > 0$, unde $c > 0$ este o constantă,

b) $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^R |f(x)|dx = 0$,

atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

* * *