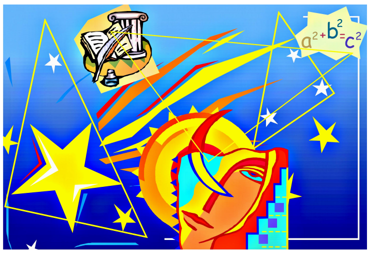
Concursul Interjudeţean de Matematică ”Teodor Topan”, Ediţia a IX-a
Şimleu Silvaniei, 13 Decembrie 2014



Clasa a V-a

1) Jucându-se la calculator, Eileen a tastat numărul de 99 cifre

$$N = 987654321987654321...987654321$$

(repetând de 11 ori grupul 987654321), apoi a pus semnul ”+” între două cifre alăturate ale numărului N.

a) Aflaţi între care cifre a pus Eileen semnul ”+”, ştiind că dacă l-ar fi pus oriunde altundeva s-ar fi obţinut o sumă mai mică.

b) Între care cifre trebuie pus semnul ”+” pentru a se obţine cea mai mică sumă? (Justificaţi răspunsul!)

2) Dispunem de o balanţă cu două talere şi de trei greutăţi: una de 1kg, una de 3kg şi una de 9kg. Cu ajutorul lor putem cântări 10kg de mere astfel: punem pe un taler greutăţile de 1kg şi 9kg, iar pe celălalt punem mere până când balanţa se echilibrează. Vom scrie prescurtat această operaţie de cântărire astfel: $\boxed{10} = 9 + 1$.

a) Descrieţi operaţia de cântărire a două kilograme de mere şi scrieţi-o prescurtat.

b) Arătaţi (scriind prescurtat operaţiile de cântărire) că folosind balanţa şi cele trei greutăţi putem cântări de fapt orice număr întreg de kilograme de mere între 1kg şi 13kg.

3) Mulţimea numerelor naturale impare se împarte în grupe de 1, 2, 3,... numere astfel:

$$1;\ 3, 5;\ 7, 9, 11;\ 13, 15, 17, 19; \ldots.$$

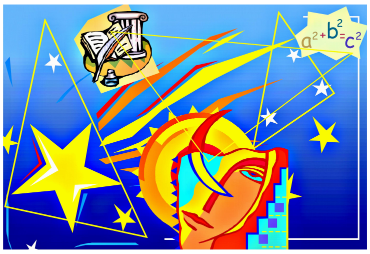
a) Aflaţi care este primul număr din cea de-a 2014-a grupă.

b) Calculaţi suma tuturor numerelor din primele 2013 grupe.

c) Suma numerelor din fiecare grupă se calculează după o regulă simplă. Găsiţi această regulă şi arătaţi cu ajutorul ei că $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 2013^3$ este pătrat perfect.

Timp de lucru: **2 ore**

Concursul Interjudeţean de Matematică ”Teodor Topan”, Ediţia a IX-a
Şimleu Silvaniei, 13 Decembrie 2014



Clasa a VI-a

1) Aflaţi numerele $\overline{abcdef}$ ştiind că $\{a, b, c, d, e, f\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi $6 \mid \overline{abcdef}$, $5 \mid \overline{abcde}$, $4 \mid \overline{abcd}$, $3 \mid \overline{abc}$, $2 \mid \overline{ab}$.

2) Pinocchio a pus pe masă patru monede veritabile, fiecare cântărind 5g. Vulpoiul Honest John a sustras însă o monedă şi a înlocuit-o cu una falsă, care nu are aceeaşi greutate cu cea originală. Jiminy dispune de o balanţă cu două talere şi de o greutate de 5g. El doreşte să descopere moneda falsă şi să decidă dacă aceasta are mai mult sau mai puţin de 5g, însă nu se descurcă deoarece îi sunt permise doar două cântăriri. Ajutaţi-l pe Jiminy în demersul său, arătându-i cum să procedeze.

3) În cele 12 pătrăţele ale unui tabel dreptunghiular cu 3 linii şi 4 coloane se scriu, într-o ordine oarecare, numerele $1, 2, 3, ..., 12$.

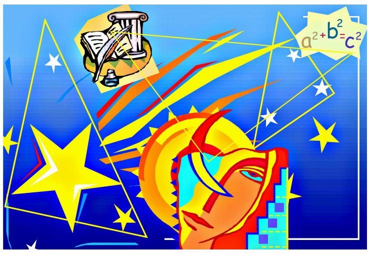
a) Andrei a aranjat numerele în tabel, iar după ce a şters trei numere a constatat că produsul numerelor rămase este pătrat perfect. Ce numere a şters Andrei?

b) Spunem că un tabel este ”tabel par” dacă suma numerelor din fiecare coloană a sa este un număr par şi că o coloană este ”coloană pară” dacă fiecare din cele 3 numere scrise în pătrăţelele ei este un număr par. Câte coloane pare poate avea un tabel par? (Justificaţi răspunsul!)

c) Aflaţi toate numerele naturale k pentru care există o aşezare a celor 12 numere în tabel astfel încât suma numerelor din fiecare linie să se dividă cu k.

Timp de lucru: **2 ore**

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan", Ediţia a IX-a
Şimleu Silvaniei, 13 Decembrie 2014



Clasa a VII-a

1) Pe o masă se află 27 de monede. Se ştie că 26 dintre ele sunt veritabile, fiecare cântărind 10 g, iar una este falsă şi cântăreşte 9,5 g.

Arătaţi cum se poate determina moneda falsă din trei cântăriri, având la dispoziţie o balanţă cu două talere (fără greutăţi).

2) Fie I punctul de intersecţie a bisectoarelor triunghiului dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$. Pe semidreptele $(BA$ şi $(CA$ se consideră respectiv punctele D şi E astfel încât $BD = CE = BC$. Notăm cu T punctul de intersecţie a dreptelor BE şi CD. Demonstraţi că $TEID$ este paralelogram.

3) Aflaţi numerele întregi x, y, z cu proprietatea:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{3}{4}.$$

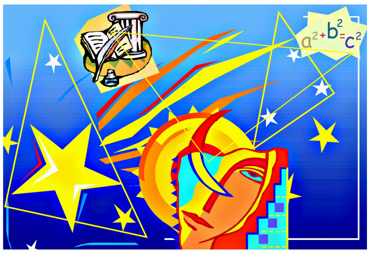
4) În patrulaterul convex $ABCD$ bisectoarele unghiurilor $\angle BAD$ şi $\angle ABC$ se intersectează în M. Demonstraţi că:

a) dacă $M \in [CD]$ şi $AB = AD + BC$, atunci M este mijlocul lui $[CD]$ şi $AD \| BC$;

b) reciproc, dacă unghiurile $\angle ADC$ şi $\angle BCD$ sunt necongruente, iar M este mijlocul lui $[CD]$, atunci $AD \| BC$ şi $AB = AD + BC$.

Timp de lucru: **3 ore**

Concursul Interjudeţean de Matematică "Teodor Topan", Ediţia a IX-a
Şimleu Silvaniei, 13 Decembrie 2014



Clasa a VIII-a

1) Arătaţi că

$$\frac{a^2+b^2}{2ab+c^2}+\frac{b^2+c^2}{2bc+a^2}+\frac{c^2+a^2}{2ca+b^2}\geq 2,$$

unde a, b, c sunt numere reale strict pozitive.

2) Aflaţi numerele naturale n cu proprietatea: $4^{n-1}+7\cdot 2^n+48=n!$.
(Prin definiţie, $0!=1!=1$ şi $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$, dacă $n\geq 2$.)

3) a) Pe tablă sunt scrişi divizorii naturali numărului $N=2^{11}\cdot 3^{10}$. Se unesc printr-un segment fiecare două numere diferite care nu sunt relativ prime (au un divizor comun mai mare decât 1). Câte segmente se obţin?

b) Andrei, elev în clasa a VIII-a, a rezolvat problema de la a) astfel: "Numărul N are $12\cdot 11=132$ divizori. Dacă am uni prin segmente câte doi din aceşti divizori (relativ primi sau nu) am obţine $\frac{132\cdot 131}{2}=8646$ segmente. $12\cdot 11=132$ dintre aceste segmente (cele care au un capăt în mulţimea $\{1,2,2^2,...,2^{11}\}$, iar celălalt în mulţimea $\{1,3,...,3^{10}\}$) unesc însă divizori relativ primi ai lui N. Deci $8646-132=8514$ segmente au capetele în numere care nu sunt relativ prime." Unde a greşit Andrei?

4) a) Se consideră triunghiul ABC în care $AB=AC=b, BC=a$ şi $m(\angle A)=\frac{60^\circ}{n}$ cu $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $b\leq na$.

b) Aflaţi toate numerele $m\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $\sin\frac{30^\circ}{m}=\frac{1}{2m}$.

Timp de lucru: **3 ore**