Clasa a V-a

1) Jucându-se la calculator, Eileen a tastat numărul de 99 cifre

$$N = 987654321987654321...987654321$$

(repetând de 11 ori grupul 987654321), apoi a pus semnul "+" între două cifre alăturate ale numărului N.

a) Aflaţi între care cifre a pus Eileen semnul "+", ştiind că dacă l-ar fi pus oriunde altundeva s-ar fi obţinut o sumă mai mică.

b) Între care cifre trebuie pus semnul "+" pentru a se obţine cea mai mică sumă? (Justificaţi răspunsul!)

Folclor

Soluţie. a) Eileen a pus semnul "+" între ultimele două cifre: dacă semnul "+" se pune între primele două cifre sau între ultimele două cifre, atunci suma celor două numere are 98 cifre, dacă se pune după cea de-a doua cifră sau după cea de-a 97-a cifră se obţine un număr de 97 cifre, etc. Deci oriunde altundeva ar plasa Eileen semnul "+", suma obţinută ar avea mai puţin de 98 de cifre. .... $2p$

b) Pentru a obţine suma cea mai mică (deci un număr de cât mai puţine cifre) trebuie să punem semnul "+ " "undeva la mijloc", adică fie între cea de-a 49-a şi cea de-a 50-a cifră, fie între cea de-a 50-a şi cea de-a 51-a cifră (în fiecare din aceste cazuri suma are 50 sau 51 de cifre) .... $2p$

În primul caz numărul obţinut prin adunare are 50 de cifre, iar în al doilea caz se obţine un număr mai mare (de 51 de cifre). Deci pentru a obţine cea mai mică sumă trebuie să punem semnul "+" între cea de-a 49-a şi cea de-a 50-a cifră. .... $3p$

2) Dispunem de o balanţă cu două talere şi de trei greutăţi: una de 1kg, una de 3kg şi una de 9kg. Cu ajutorul lor putem cântări 10kg de mere astfel: punem pe un taler greutăţile de 1kg şi 9kg, iar pe celălalt punem mere până când balanţa se echilibrează. Vom scrie prescurtat această operaţie de cântărire astfel: $\boxed{10} = 9 + 1$.

a) Descrieţi operaţia de cântărire a două kilograme de mere şi scrieţi-o prescurtat.

b) Arătaţi (scriind prescurtat operaţiile de cântărire) că folosind balanţa şi cele trei greutăţi putem cântări de fapt orice număr întreg de kilograme de mere, de la 1kg la 13kg.

Problema lui Bachet (adaptare)

Soluţie. Convenim să punem merele pe talerul din stânga.

a) Pentru a cântari 2kg punem pe talerul din dreapta greutatea de 3kg, pe talerul din stânga greutatea de 1kg şi echilibrăm balanţa cu mere. Prescurtat: $\boxed{2} + 1 = 3$. .... $2p$

b) Celelalte greutăţi pot fi cântărite astfel:

$$\boxed{1} = 1;\ \boxed{3} = 3;\ \boxed{4} = 3 + 1;\ \boxed{5} + 3 + 1 = 9;\ \boxed{6} + 3 = 9;$$

$$\boxed{7} + 3 = 9 + 1;\ \boxed{8} + 1 = 9;\ \boxed{9} = 9;$$

$$\boxed{11} + 1 = 9 + 3;\ \boxed{12} = 9 + 3;\ \boxed{13} = 9 + 3 + 1.$$

Barem: $\boxed{1} = 1$, $\boxed{3} = 3$, $\boxed{9} = 9$. .... $1p$

$\boxed{6} + 3 = 9$, $\boxed{8} + 1 = 9$.. $1p$

$\boxed{4} = 3 + 1$, $\boxed{12} = 9 + 3$, $\boxed{13} = 9 + 3 + 1$.......................... $1p$

$\boxed{5} + 3 + 1 = 9$, $\boxed{7} + 3 = 9 + 1$; $\boxed{11} + 1 = 9 + 3$ .... $2p$

3) Mulţimea numerelor naturale impare se împarte în grupe de 1, 2, 3,... numere astfel:

$$1;\ 3, 5;\ 7, 9, 11;\ 13, 15, 17, 19; \dots.$$

a) Aflaţi care este primul număr din cea de-a 2014-a grupă.

GM 10/2014, E: 14720-Radu Ciupea, Olteniţa (enunţ parţial)

b) Calculaţi suma tuturor numerelor din primele 2013 grupe.

c) Suma numerelor din fiecare grupă se calculează după o regulă simplă. Găsiţi această regulă şi arătaţi cu ajutorul ei că $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 2013^3$ este pătrat perfect.

Problema lui Nicomah din Gerasa (adaptare)

Soluţie. a) În primele 2013 grupe sunt $1 + 2 + ... + 2013 = \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2027091$. Primul număr din cea de-a 2014-a grupă este cel de-al $2013 \cdot 1007 + 1$-lea număr impar. .... $1p$

Răspuns: $2 \cdot (2013 \cdot 1007) + 1 = 2013 \cdot 2014 + 1 = 4054183$. .... $1p$

b) Trebuie să calculăm suma $S = 1 + 3 + 5 + ... + 4054181$. Vom folosi metoda lui Gauss. Suma are 2027091 termeni, deci

$$2S = 4054182 + 4054182 + ... + 4054182 = 4054182 \cdot 2027091.$$

Rezultă că $S = \frac{4054182 \cdot 2027091}{2} (= 2027091^2)$. .... $2p$

c) Sumele din primele patru grupe sunt $1 = 1^3,\ 8 = 2^3,\ 27 = 3^3,\ 64 = 4^3$. Ele sugerează regula: ”suma numerelor din cea de-a n-a grupă este n^3” . $1p$

Conform acestei reguli, suma $1^3 + 2^3 + ... + 2013^3$ reprezintă suma numerelor din primele 2013 grupe, deci este egală cu 2027091^2. .... $2p$

Clasa a VI-a

1) Aflaţi numerele $\overline{abcdef}$ ştiind că $\{a, b, c, d, e, f\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi $6 \mid \overline{abcdef}$, $5 \mid \overline{abcde}$, $4 \mid \overline{abcd}$, $3 \mid \overline{abc}$, $2 \mid \overline{ab}$.

GM 10/2014, E: 14723-D.M. Bătineţu-Giurgiu, Neculai Stanciu

Soluţie. Din $5 \mid \overline{abcde}$ rezultă $e = 5$. 1p

De asemenea, numerele f, d şi b sunt pare, deci $\{f, d, b\} = \{2, 4, 6\}$, $\{a, c\} = \{1, 3\}$ 1p

În aceste condiţii numărul $\overline{abcdef}$ se divide cu 6 (1+2+3+4+5+6 se divide cu 3). 1p

Din $3 \mid \overline{abc}$ rezultă că $a + b + c$ se divide cu 3, deci $b = 2$. 1p

Cum $d, f \in \{2, 4, 6\}$, deducem că $\{d, f\} = \{4, 6\}$. 1p

Din $4 \mid \overline{cd}$ deducem că sau $c = 1, d = 6$ (şi $a = 3, f = 4$), sau $c = 3, d = 6$ (şi $a = 1, f = 4$). 2p

Prin urmare numerele cu proprietăţile din enunţ sunt 123654 şi 321654.

2. Pinocchio a pus pe masă patru monede veritabile, fiecare cântărind 5g. Vulpoiul Honest John a sustras însă o monedă şi a înlocuit-o cu una falsă, care nu are aceeaşi greutate cu cea originală. Jiminy dispune de o balanţă cu două talere şi de o greutate de 5g. El doreşte să descopere moneda falsă şi să decidă dacă aceasta are mai mult sau mai puţin de 5g, însă nu se descurcă deoarece îi sunt permise doar două cântăriri. Ajutaţi-l pe Jiminy în demersul său, arătându-i cum să procedeze.

Folclor

Soluţie. Notăm cu A, B, C, D cele patru monede şi cu a, b, c, d greutăţile lor (în grame).

La prima cântărire punem pe un taler monedele A, B, iar pe celălalt taler moneda C şi greutatea de 5 grame. 1p

i) *Balanţa este în echilibru.* Atunci moneda falsă este D şi putem vedea dacă ea este mai uşoară sau mai grea decât una veritabilă printr-o nouă cântărire (comparând-o cu greutatea de 5g). 2p

ii) *Balanţa nu este în echilibru.* Atunci moneda falsă este una din monedele A, B sau C. 1p

Presupunem că $a + b > c + 5$ (cazul $a + b < c + 5$ se tratează exact la fel). Dacă moneda falsă este A sau B, atunci ea are mai mult de 5g, iar dacă moneda falsă este C, atunci ea are mai puţin de 5g. 1p

La a doua cântărire comparăm a şi b (punând pe câte un taler monedele A şi B). Dacă $a = b$ atunci moneda falsă este C (şi $c < 5$), iar dacă $a \neq b$

atunci cea mai grea dintre monedele A şi B este falsă. . . . . $2p$

3) În cele 12 pătrăţele ale unui tabel dreptunghiular cu 3 linii şi 4 coloane se scriu, într-o ordine oarecare, numerele $1, 2, 3, ..., 12$.

a) Andrei a aranjat numerele în tabel, iar după ce a şters trei numere a constatat că produsul numerelor rămase este pătrat perfect. Ce numere a şters Andrei?

b) Spunem că un tabel este "tabel par" dacă suma numerelor din fiecare coloană a sa este un număr par şi că o coloană este "coloană pară" dacă fiecare din cele 3 numere scrise în pătrăţelele ei este un număr par. Câte coloane pare poate avea un tabel par? (Justificaţi răspunsul!)

c) Aflaţi toate numerele naturale k pentru care există o aşezare a celor 12 numere în tabel astfel încât suma numerelor din fiecare linie să se dividă cu k.

Dorel Miheţ

Soluţie. a) În produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 12 = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ numerele prime 7 şi 11 apar la puterea 1, deci trebuie şterse. De asemenea, 3 apare la o putere impară, deci cel de-al treilea număr şters de Andrei este sau 3, sau 12. . . $2p$

b) Un tabel par are în fiecare coloană un număr par de numere impare, deci are sau două numere impare sau niciun număr impar. Cum sunt 4 coloane şi 6 numere impare mai mici decât 12, trei dintre coloane au câte două numere impare, iar una dintre coloane nu are niciun număr impar. Aşadar un tabel par are exact o coloană pară. . . . . $1p$

c) Suma celor 12 numere din tabel este $6 \cdot 13$. Dacă suma numerelor din fiecare linie se divide cu k, atunci şi suma numerelor din aceste linii se divide cu k, deci k este un divizor al lui $6 \cdot 13$.
Aşadar $k \in \{1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78\}$. . . . . $1p$

Dacă $k \geq 39$, atunci suma numerelor din fiecare linie ar fi cel puţin 39, deci suma numerelor din tabel ar fi cel puţin $3 \cdot 39 = 108$, ceea ce nu se poate. Deci $k \leq 26$. . . . . $1p$

Un exemplu cu $k = 26$ este un tabel care are în primele două linii numerele $8, 7, 6, 5$; $4, 9, 1, 12$, iar unul din tabelele cu $k = 6$ are pe primele două linii numerele $1, 2, 3, 6$; $4, 8, 5, 7$. . . . . $1p$

Cum numerele $1, 2, 3$ sunt divizori ai lui 6, iar 13 este un divizor al lui 26, numerele cerute la c) sunt $1, 2, 3, 6, 13, 26$ . . . . $1p$

Clasa a VII-a

1) Pe o masă se află 27 de monede. Se ştie că 26 dintre ele sunt veritabile, fiecare cântărind 10 g, iar una este falsă şi cântăreşte 9,5 g.

Arătaţi cum se poate determina moneda falsă din trei cântăriri, având la dispoziţie o balanţă cu două talere (fără greutăţi).

Folclor

Soluţie. Împărţim cele 27 de monede în trei grupe de câte 9. .... $1p$

Din prima cântărire identificăm grupa în care se află moneda mai uşoară, comparând cu ajutorul balanţei greutăţile monedelor din două grupe (alese la întâmplare): punem pe câte un taler monedele din grupele respective; dacă balanţa se echilibrează atunci moneda falsă se află în grupa rămasă, iar dacă nu, atunci ea se află în grupa mai uşoară. .... $2p$

Ne-au mai rămas două cântăriri pentru a găsi moneda falsă din grupul de nouă. Vom proceda ca la început, însă cu 3 grupe mai mici: de câte trei monede la cea de-a doua cântărire, şi de câte o monedă la cea de-a treia cântărire. Împărţim mai întâi cele nouă monede în trei grupe de câte 3 şi dintr-o cântărire identificăm grupa în care se află moneda falsă. .... $2p$

Considerăm această grupă şi o împărţim în 3 grupe de câte o monedă. Dintr-o nouă cântărire (ultima permisă) aflăm moneda mai uşoară. ..... $2p$

2) Fie I punctul de intersecţie a bisectoarelor triunghiului dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90°$. Pe semidreptele $(BA$ şi $(CA$ se consideră respectiv punctele D şi E astfel încât $BD = CE = BC$. Notăm cu T punctul de intersecţie a dreptelor BE şi CD. Demonstraţi că $TEID$ este paralelogram.

GM 10/2014, E:14728-Ion Tudor, Băbana, Argeş

Soluţie. Semidreapta $[BI$ conţine bisectoarea corespunzătoare bazei din triunghiul isoscel BCD, deci $IB \perp TD$. .... $1p$

Pentru a demonstra că $TD \parallel IE$ va fi suficient să demonstrăm că şi $IE \perp IB$. .... $1p$

Se vede însă imediat (din congruenţa $\triangle CEI \equiv \triangle CBI$) că $IB = IE$. $2p$

Aşadar va fi suficient să arătăm că $m(\angle IBE) = 45°$. Această egalitate se demonstrează uşor: $m(\angle IBE) = m(\angle CBE) - m(\angle CBI)$, iar $m(\angle CBE) = \frac{180° - m(\angle C)}{2}$, $m(\angle CBI) = \frac{m(\angle B)}{2}$, deci

$$m(\angle CBE) - m(\angle CBI) = 90° - \frac{m(\angle C) + m(\angle B)}{2} = 45° \text{.........................} 2p$$

Analog se arată că $TE \| DI$, deci $TDIE$ este paralelogram. .... $1p$

3) Aflaţi numerele întregi x, y, z cu proprietatea:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{3}{4}.$$

Dorel Miheţ

Soluţie. Fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$ care verifică egalitatea din enunţ. Sunt posibile următoarele cazuri:

a) $x > 0, y > 0, z > 0$.

Cel mai mic dintre numitorii celor trei fracţii nu este mai mare decât 4, deoarece în caz contrar

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

în contradicţie cu ipoteza.

Să presupunem că $xy \leq 4$ şi că $x \leq y$. Atunci

$$xy = 2 \Rightarrow x = 1, y = 2, \frac{1}{z} + \frac{1}{2z} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 1, y = 2, z = 6.$$

$$xy = 3 \Rightarrow x = 1, y = 3, \frac{1}{z} + \frac{1}{3z} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{4}{3z} = \frac{5}{12} \Rightarrow z = \frac{48}{15} \notin \mathbb{Z}.$$

$$x = 1, y = 4 \Rightarrow \frac{1}{z} + \frac{1}{4z} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{4z} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

$$x = 2, y = 2 \Rightarrow \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 2.$$

Deci soluţiile naturale sunt date de

$$\{x, y, z\} = \{1, 2, 6\};\ x = y = z = 2.$$

b) $x < 0, y < 0, z < 0$.

Atunci $x' = -x, y' = -y, z' = -z$ sunt pozitive şi $\frac{1}{x'y'} + \frac{1}{y'z'} + \frac{1}{z'x'} = \frac{3}{4}$, deci $\{x', y', z'\} = \{1, 2, 6\}; x' = y' = z' = 2$, de unde obţinem

$$\{x, y, z\} = \{-1, -2, -6\};\ x = y = z = -2.$$

c) Două dintre numerele x, y sunt negative, iar unul pozitiv.

Presupunem că $x < 0, y < 0, z > 0$. Atunci $x' = -x, y' = -y, z' = z$ sunt pozitive, deci avem de rezolvat în numere naturale ecuaţia:

$$\frac{1}{x'y'} - \frac{1}{y'z'} - \frac{1}{z'x'} = \frac{3}{4}.$$

Trebuie ca $x'y' = 1$ (în caz contrar $\frac{1}{x'y'} \leq \frac{1}{2}$, deci membrul stâng este mai mic decât $\frac{3}{4}$).

Rezultă că $x' = y' = 1$ şi $\frac{1}{z'} + \frac{1}{z'} = \frac{1}{4}$, adică $z' = 8$. Aşadar $x = y = -1$, $z = 8$. Din simetrie obţinem încă două soluţii, deci în acest caz două dintre numerele x, y, z sunt egale cu -1, iar cel de-al treilea este egal cu 8.

d) Două dintre numerele x, y sunt negative, iar unul pozitiv.

Procedând ca la c) (sau observând că dacă x, y, z verifică egalitatea dată, atunci şi $-x, -y, -z$ verifică această egalitate), obţinem în acest caz că două dintre numerele x, y, z sunt egale cu 1, iar celălalt număr este -8.

Barem: 4p pentru primul caz, câte un punct pentru fiecare din celelalte cazuri.

4) În patrulaterul convex $ABCD$ bisectoarele unghiurilor $\angle BAD$ şi $\angle ABC$ se intersectează în M. Demonstraţi că:

a) dacă $M \in [CD]$ şi $AB = AD + BC$, atunci M este mijlocul lui $[CD]$ şi $AD \| BC$;

b) reciproc, dacă unghiurile $\angle ADC$ şi $\angle BCD$ sunt necongruente, iar M este mijlocul lui $[CD]$, atunci $AD \| BC$ şi $AB = AD + BC$.

Maria Miheţ, Dorel Miheţ, Timişoara

Soluţie. a) Considerăm punctul $E \in [AB]$ astfel încât $AE = AD$. Atunci $EB = BC$ deci

$$\triangle ADM \equiv \triangle AEM, \ \triangle BCM \equiv \triangle BEM \quad (LUL).$$

Rezultă că $DM = ME = MC$, adică M este mijlocul lui $[DC]$. ....$2p$

Din egalităţile de mai sus rezultă că triunghiul DEC este dreptunghic, cu unghiul drept în E. .... $1p$

Notând cu α, β măsurile unghiurilor $\angle DEA$ şi $\angle CEB$ (respectiv), rezultă că $\alpha + \beta = 90°$. În triunghiurile isoscele $\triangle DAE$ şi $\triangle CEB$ avem $m(\angle A) = 180° - 2\alpha$ şi $m(\angle B) = 180° - 2\beta$. Prin urmare

$$m(\angle A) + m(\angle B) = 360° - 2(\alpha + \beta) = 180°,$$

de unde deducem că dreptele DA şi CB sunt paralele. ....$1p$

b) Presupunem, prin reducere la absurd, că AD şi BC se intersectează în P. Notăm cu M_1, M_2, M_3 proiecţiile lui M pe dreptele AB, AD, BC (respectiv). Din faptul că M se află pe bisectoarele unghiurilor $\angle BAD$ şi $\angle ABC$, rezultă că $MM_1 = MM_2$ şi $MM_1 = MM_3$, deci $MM_2 = MM_3$. Prin urmare M aparţine bisectoarei unghiului $\angle CPD$, deci $[PM]$ este bisectoare şi mediană în triunghiul PCD. Atunci $\triangle PCD$ este isoscel, cu $PC = PD$, în contradicţie cu ipoteza că unghiurile $\angle ADC$ şi $\angle BCD$ nu sunt congruente. Contradicţia provine din faptul că am presupus că dreptele AD şi BC nu sunt paralele. Aşadar $AD \| BC$, ceea ce ne-am propus să demonstrăm. . . . $2p$ (un singur punct dacă rezolvarea funcţionează numai pentru unul din cazurile P, A în acelaşi semiplan determinat de CD sau P, A în semiplane diferite).

Fie $Q = BM \bigcap AD$. Atunci $DQ = BC$, iar $\triangle ABQ$ este isoscel, având unghiurile $\angle ABQ$ şi $\angle AQB$ de măsură $\frac{m(\angle B)}{2}$. Deci $AB = AD + BC$ . . . $1p$

Alternativ, din $AD \| BC$ rezultă că unghiurile $\angle BAD$ şi $\angle ABC$ sunt suplementare, deci $m(\angle AMB) = 90°$ şi notând cu N mijlocul segmentului $[AB]$ avem pe de o parte $MN = \frac{AB}{2}$ (ca mediană corespunzătoare ipotenuzei) şi pe de altă parte $MN = \frac{AD+BC}{2}$ (ca linie mijlocie în trapez), deci $AB = AD + BC$. . . . . $1p$

Clasa a VIII-a

1) Arătaţi că

$$\frac{a^2+b^2}{2ab+c^2}+\frac{b^2+c^2}{2bc+a^2}+\frac{c^2+a^2}{2ca+b^2}\geq 2,$$

unde a, b, c sunt numere reale strict pozitive.

GM 10/2014, E:14730, Ştefan Marica, Drobeta Tr. Severin

Soluţie. $2ab+c^2 \leq a^2+b^2+c^2$, deci

$\frac{a^2+b^2}{2ab+c^2} \geq \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}$ .... $3p$

Scriind şi celelalte inegalităţi analoage rezultă:

$\sum \frac{a^2+b^2}{2ab+c^2} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = 2$ .... $4p$

Alternativ, se poate folosi "inegalitatea lui Titu":

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\frac{x_3^2}{y_3} \geq \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{y_1+y_2+y_3}$$

.... $1p$

Conform acestei inegalităţi,

$\sum \frac{a^2}{2ab+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1$ .... $3p$

La fel,

$\sum \frac{b^2}{2ab+c^2} \geq 1$ .... $3p$

Se poate aplica inegalitatea lui Titu şi plecând de la inegalitatea:

$$\frac{2(a^2+b^2)}{2ab+c^2} \geq \frac{(a+b)^2}{2ab+c^2}.$$

2) Aflaţi numerele naturale n cu proprietatea: $4^{n-1} + 7 \cdot 2^n + 48 = n!$. (Prin definiţie, $0! = 1! = 1$ şi $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, dacă $n \geq 2$.)

Olimpiadă Rusia

Soluţie. Dacă n verifică egalitatea dată, atunci $n! > 48$, deci $n \geq 5$ .. $1p$

Deoarece $4^4 + 7 \cdot 2^5 + 48 > 120$, $n = 5$ nu este soluţie. .... $1p$

De asemenea, pentru $n = 6$, $4^{n-1} = 2^{10} = 1024$ este deja mai mare decât $720 = 6!$, deci nu avem soluţie nici în acest caz.

Din egalitatea $4^6 + 7 \cdot 2^7 + 48 = 5040 = 7!$ rezultă că $n = 7$ este soluţie $1p$

Dacă $n \geq 8$, atunci $n!$ se divide cu 2^7, iar 2^7 divide doar doi din termenii sumei $4^{n-1} + 7 \cdot 2^n + 48$, deci $4^{n-1} + 7 \cdot 2^n + 48 \neq n!$ .... $4p$

Deci singurul număr care verifică egalitatea dată este $n = 7$.

3) a) Pe tablă sunt scrişi divizorii naturali ai numărului $N = 2^{11} \cdot 3^{10}$. Se unesc printr-un segment fiecare două numere diferite care nu sunt relativ prime (au un divizor comun mai mare decât 1). Câte segmente se obţin?

b) Andrei, elev în clasa a VIII-a, a rezolvat problema de la a) astfel: ”Numărul N are $12 \cdot 11 = 132$ divizori. Dacă am uni prin segmente câte doi din aceşti divizori (relativ primi sau nu) am obţine $\frac{132 \cdot 131}{2} = 8646$ segmente. $12 \cdot 11 = 132$ dintre aceste segmente (cele care au un capăt în mulţimea $\{1, 2, 2^2, ..., 2^{11}\}$, iar celălalt în mulţimea $\{1, 3, ..., 3^{10}\}$) unesc însă divizori relativ primi ai lui N. Deci $8646 - 132 = 8514$ segmente au capetele în numere care nu sunt relativ prime.” Unde a greşit Andrei?

Olimpiadă Rusia (prelucrare)

Soluţie. a) Fie A mulţimea divizorilor lui N care sunt multipli de 2 şi B mulţimea divizorilor lui N care sunt multipli de 3. Conform enunţului, segmentele trasate au fie ambele capete în mulţimea A, fie ambele capete în mulţimea B. Mulţimea A are $11 \cdot 11 = 121$ elemente, mulţimea B are 120 elemente, iar $A \cap B$ are 110 elemente. .... $2p$

Conform principiului includerii şi excluderii, se obţin $\frac{121 \cdot 120}{2} + \frac{120 \cdot 119}{2} - \frac{110 \cdot 109}{2} = 14400 - 5995 = 8405$ segmente (segmentele cu capetele multipli de 6 au fost numărate de două ori). .... $2p$

b) Andrei a greşit când a calculat numărul de segmente care trebuie excluse. Mai întâi, numărul de segmente care unesc un divizor din mulţimea $\{1, 2, 2^2, ..., 2^{11}\}$ cu unul din mulţimea $\{1, 3, ..., 3^{10}\}$ nu este 132 ci 131 (divizorii $3^0 = 1$ şi $2^0 = 1$ sunt egali). .... $1p$

Apoi, a uitat să le excludă pe cele cu un capăt egal cu 1, iar celălalt multiplu şi de 2 şi de 3. Acestea sunt în număr de $10 \cdot 11 = 110$ .... $2p$

(Prin urmare numărul de segmente este $8646 - (131 + 110) = 8405 \,.\,.\, 4p$)

4) a) Se consideră triunghiul ABC în care $AB = AC = b, BC = a$ şi $m(\angle A) = \frac{60^\circ}{n}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $b \leq na$.

b) Aflaţi toate numerele $m \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $\sin \frac{30^\circ}{m} = \frac{1}{2m}$.

Dorel Miheţ

Soluţie. a) Alăturând n triunghiuri ABC cu vârful în A şi notând cu $C_1, C_2, ..., C_n$ ($C_1 = C$) "imaginile" punctului C se obţine poligonul cu $n+2$ laturi $ABC_1C_2...C_{n-1}C_n$, care are n laturi egale cu $[BC]$ şi două ($[AB]$ şi $[AC_n]$) egale cu $[AB]$, unghiul dintre acestea două din urmă fiind de 60°.

Din triunghiul echilateral ABC_n rezultă $BC_n = AB = b$ şi cum

$$BC_n \leq BC_1 + C_1C_2 + ... + C_{n-1}C_n$$

cu egalitate doar dacă $n = 1$, deducem că $b \leq na$, egalitatea având loc pentru $n = 1$. .... $3p$

b) Ducând înălţimea $[AA']$ în triunghiul ABC obţinem

$$BC = 2BA' = 2b \sin \frac{30^\circ}{n}.$$

Din punctul a) rezultă că pentru orice număr natural $n \neq 1$ are loc inegalitatea $b < n \cdot 2b \sin \frac{30^\circ}{n}$, adică $\sin \frac{30^\circ}{n} > \frac{1}{2n}$. .... $3p$

Cum $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, singurul număr care verifică egalitatea din enunţ este $m = 1$. .... $1p$